ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

20 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 31

Α2. Σχολικό σελίδα 22

Α3. Σχολικό σελίδα 87

Α4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1 . $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$

$3x\ -1=0$ ή $8x^2-6x+1=0\ \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{1}{3}$ ή $x=\dfrac{1}{2}$ ή $x=\dfrac{1}{4}$

Επειδή $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \Leftrightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

οπότε $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2. $P(A'-B')=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

Έχω $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow P(A'-B')=\frac{1}{6}$

Επίσης $P(\Delta)=P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3. $P(E)=P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Β4. Έχω $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Αν ήταν ασυμβίβαστα θα είχα :

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$ Άτοπο .

Άρα Β,Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχω

- $f_1 = 0{,}1$
- $f_5 = 0{,}3$
- $\alpha_3 = 108^o \Leftrightarrow 360^o f_3 = 108^o \Leftrightarrow f_3 = 0{,}3$

  είναι $\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow$

  $0{,}1 + f_2 + 0{,}3 + f_4 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3$ (1)

  Επίσης $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow$

  $9 \cdot 0{,}1 + 11 f_2 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 f_4 + 17 \cdot 0{,}3 = 14 \Leftrightarrow$

  $11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1$ (2)

Λύνω το σύστημα των (1),(2) και έχω $f_2 = 0{,}1$, $f_4 = 0{,}2$

Γ2.Είναι $s^2 = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = (9-14)^2 \cdot 0{,}1 + (11-14)^2 \cdot 0{,}1 + (13-14)^2 \cdot 0{,}3 + (15-14)^2 \cdot 0{,}2 + (17-14)^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}5 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}7 = 6{,}6 \Rightarrow s = \sqrt{6{,}6}$

Οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}57}{14} \cong 0{,}18 > 0{,}1$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

Γ3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} + x_5 f_5 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0{,}3 \Leftrightarrow \nu = 200$

Γ4. Οι παρατηρήσεις έχουν μορφή $\beta_i = \frac{1}{S_a} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_a}$

Επομένως $\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = 0$ και $s_\beta = \frac{1}{S_\alpha} \cdot s_\alpha = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 . Θεωρώ ΒΓ= y, τότε $E_{ΑΒΓΔ} = x \cdot y$.

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι: $x^2 + y^2 = (2\rho)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

Άρα $E = x\sqrt{100 - x^2}$ με $x > 0$ και $100 - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 10$

Άρα $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$

Δ2. $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$, $0 < x < 10$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 100 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 50 \overset{x>0}{\Longrightarrow} 0 < x \leq 5\sqrt{2}$$

x		0	$5\sqrt{2}$	10
$f(x)$		$+$	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	

O.M.

Παρατηρούμε ότι αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0{,}5\sqrt{2})$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (5\sqrt{2}, 10)$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = 5\sqrt{2}$ και τότε

$$y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Άρα $x = y$ οπότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο .

Δ3. Παρατηρούμε ότι $f(1) = \sqrt{99}$ οπότε $\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}} \cdot \frac{1}{98} = \frac{1}{\sqrt{99}}$

Δ4. $A - B \subseteq A \Leftrightarrow P(A-B) \leq P(A)$ (1)

Επίσης $P^2(A-B) \leq P^2(A) \Leftrightarrow$

$-P^2(A-B) \geq -P^2(A) \Leftrightarrow$

$100 - P^2(A-B) \geq 100 - P^2(A) \Leftrightarrow$

$\sqrt{100 - P^2(A-B)} \geq \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}$ (2)

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και μετά από πράξεις προκύπτει : $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$

Δείχνω ότι $\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \leq 1 \Leftrightarrow$

$P(A) \leq \sqrt{100 - P^2(A-B)} \Leftrightarrow P^2(A) \leq 100 - P^2(A-B) \Leftrightarrow$

$P^2(A) + P^2(A-B) \leq 100$ που ισχύει αφού $0 < P(A) < 1$ και

$0 < P(A-B) < 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) έχω

$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

ΚΑΥΚΑΛΑΣ ΝΙΚΟΛΑΣ

ΜΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΝΗΡΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ