ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $x>0$ άρα $A_f=(0,+\infty)$

Β2. Ισχύει ότι $f'(x)=\frac{2}{x}+3$. Άρα :

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{xf'(x)-2x}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{x(\frac{2}{x}+3)-2x}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{2+3x-2x}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{2+x}=\lim_{x\to -2}(x+3)=1$$

Β3. Έχουμε ότι: $f''(x)=-\frac{2}{x^2}$ και άρα $f''(1)=-\frac{2}{1^2}=-2$ ενώ $f'(1)=5$:

$$-\frac{1}{2}\kappa^2 f''(1)+\kappa f'(1)-2(\kappa+5)=0\Leftrightarrow$$

$-\frac{1}{2}\kappa^2(-2)+5\kappa-2\kappa-10=0\Leftrightarrow \kappa^2+3\kappa-10=0$. που έχει ρίζες : $\kappa=-5$ και $\kappa=2$.

Β4. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ κι έχουμε:

$$2\ln x+3x=\ln\frac{e}{x}+3x+2\Leftrightarrow 2\ln x=\ln e-\ln x+2\Leftrightarrow 3\ln x=3\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$$

Άρα το σημείο τομής είναι το (e, $f(e)$) δηλαδή το (e, 2+3e).

B5. Είναι $g'(x) = -\frac{1}{x}+3$. Άρα $g'(1)=2$. Οπότε η εφαπτομένη είναι της μορφής : $y=2x+\beta$ και επειδή το σημείο (1,g(1)) την επαληθεύει, θα έχουμε : $6=2+\beta$. Οπότε το β=4 και η εφαπτομένη μας η : $y=2x+4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή τα άκρα του (35,50) είναι χαρακτηριστικές τιμές της κατανομής σημαίνει πως υπάρχουν δύο πιθανές λύσεις που να αθροίζουν 83,85%. Η μία είναι να αναφερόμαστε στο διάστημα $(\overline{x}-2s, \overline{x}+s)$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι: $\overline{x}-2s=35$ *και* $\overline{x}+s=50$. Η λύση του συστήματος μας δίνει ότι : $\overline{x}=45$ και s=5 που απορρίπτεται γιατί έχουμε τον περιορισμό η μέση τιμή να είναι κάτω από 42.
Η άλλη είναι να αναφερόμαστε στο διάστημα $(\overline{x}-s, \overline{x}+2s)$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι: $\overline{x}-s=35$ *και* $\overline{x}+2s=50$. Η λύση του συστήματος μας δίνει ότι : $\overline{x}=40$ και s=5 που είναι δεκτή άρα είναι αυτή που ψάχναμε.
Η διάμεσος θα είναι ίση με την μέση τιμή, άρα δ=40 και ο συντελεστής μεταβολής θα είναι : $CV=\frac{s}{x}\% \Rightarrow CV=\frac{5}{40}\%=12,5\%$.

Γ2. Πρέπει να βρούμε το x ώστε να ισχύει: $\frac{5}{40+x}\leq\frac{1}{10}$ κι επειδή 40+x>0 θα έχουμε: $50\leq 40+x \Rightarrow x\geq 10$. Άρα η μέση ηλικία πρέπει να αυξηθεί τουλάχιστον κατά 10 έτη.

Γ3. Επειδή $\frac{320}{2000}=0{,}16$, τα 320 άτομα αντιστοιχούν στο 16%.
Επειδή 0,15%+2,35%+13,5%=16% , θα έχουμε ότι $\overline{x}-s=30$ (1)
Αντίστοιχα $\frac{30}{2000}=0{,}015$, οπότε $\overline{x}+3s=50$ (2).
Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε ότι :
$\overline{x}=35$ και s=5
Εφόσον τα 2000 άτομα αντιστοιχούν στο 20% των αναγνωστών συνολικά τον μήνα Μάρτιο αγόρασαν το περιοδικό 10000 άτομα.

Γ4. Ηλικίες από 40 έως 50 έτη έχουν το 15,85% όσων αγοράζουν το περιοδικό από το περίπτερο , που όμως αντιστοιχούν στο 20% των συνολικών αναγνωστών και το 47,5 % των συνδρομητών που αντιστοιχούν στο 80% των συνδρομητών.
Έτσι θα έχουμε : 15,85x0,2+47,5x0,8=41,47% του συνόλου των αναγνωστών.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),...,(4,5)} με N(Ω)=20

Δ2. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+2ax-3a^2}{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)(x+3a)(\sqrt{x^2+3a^2}+2a)}{(\sqrt{x^2+3a^2}-2a)(\sqrt{x^2+3a^2}+2a)}=$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+3a)(\sqrt{x^2+3a^2}+2a)}{x^2+3a^2-4a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+3a)(\sqrt{x^2+3a^2}+2a)}{(x-a)(x+a)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x+3a)(\sqrt{x^2+3a^2}+2a)}{x+a}=\frac{4a\cdot 4a}{2a}=8a$$

Συνεπώς θέλουμε α $\geq \beta^2$. Θα πάρουμε περιπτώσεις:

Αν β=1 τότε α≥1 οπότε έχουμε τα ζεύγη (1,1),(2,1),(3,1),(4,1)

Αν β=2 τότε α≥4 οπότε έχουμε το ζεύγος (4,4)

Αν β=3 τότε α≥9 που είναι αδύνατο.

Αν β=4 τότε α≥16 που είναι αδύνατο.

Αν β=5 τότε α≥25 που είναι αδύνατο.

Οπότε έχουμε:

$$P(A)=\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

Δ3. Έχουμε ότι $f'(x)=12x^2-11x+2$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

Οι θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι το $x=\frac{1}{4}$ (τοπικό μέγιστο) και το $x=\frac{2}{3}$ (τοπικό ελάχιστο) και επειδή $P(A)\neq P(B)$ έχουμε ότι $P(B)=\frac{2}{3}$.

Δ4. Ισχύει : $B\subseteq A\cup B\Rightarrow P(B)\leq P(A\cup B)$ και $P(A\cup B)\leq 1$.

Άρα το $P(A\cup B)$ δεν μπορεί να είναι $\frac{1}{2}$, ούτε $\frac{7}{6}$. Οπότε $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$.

Έτσι έχουμε : $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$.

i. $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)=$

$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{2}{6}=\frac{7}{12}$.

ii. $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$

$P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ