ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280.

Α3. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι και συνεχής. Επομένως η g είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta = 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x + e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ell n(x+1)-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha - e^{-x}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Β2. $\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(2x + e^{-x}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(1+\ell n(x+1)\right)dx =$

$\left[x^2 - e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_0^1 1dx + \int_0^1 \ell n(x+1)dx = e - 2 + \left[x\right]_0^1 + \int_0^1 (x+1)'\ell n(x+1)dx$

$e - 1 + \left[(x+1)\ell n(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx = e - 1 + 2\ell n2 - \int_0^1 1dx = e - 1 + 2\ell n2 - 1 = e - 2 + 2\ell n2$

Οπότε έχουμε:

$\int_{-1}^{1} g(x)dx + f'(x)+1 = e - \frac{e^x}{e^x+1} + 2\ell n2 \Leftrightarrow e-2+2\ell n2 + f'(x)+1 = e - \frac{e^x}{e^x+1} + 2\ell n2 \Leftrightarrow$

$f'(x)-1 = -\frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)' = \left(-\ell n\left(e^x+1\right)\right)' \Leftrightarrow f(x)-x = -\ell n\left(e^x+1\right)+c$.

Όμως $f(0) = -\ell n2$, οπότε $c=0$. Άρα $f(x) = x - \ell n\left(e^x+1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

B3. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\ell n(e^x+1)-x\right) = -\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ell n(e^x+1)\right)=0$, γιατί:

Θέτουμε $u=e^x+1$. Όταν $x\to-\infty$ τότε $e^x\to 0$, οπότε $u=e^x+1\to 1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ell n(e^x+1)\right) = \lim\limits_{u\to 1}\left(\ell nu\right)=0$.

B4. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 1-\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\ell n\left(e^x+1\right)\right) = (-\infty)-0=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ell n\left(e^x+1\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell ne^x-\ell n\left(e^x+1\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\frac{e^x}{e^x+1}\right)=0$,

γιατί: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$, οπότε αν θέσουμε $u=\frac{e^x}{e^x+1}$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{u\to 1}\left(\ell nu\right)=0$.

Άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω ότι η f'' δεν είναι 1-1, τότε θα υπάρχουν $\kappa,\lambda\in[1,3]$ με $\kappa\neq\lambda$ (και έστω $\kappa<\lambda$) τέτοια ώστε $f''(\kappa)=f''(\lambda)$.

Για την f'' ισχύει το Θ. Rolle στο $[\kappa,\lambda]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,\lambda)\subseteq(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'''(x_0)=0$ ΑΤΟΠΟ.

Γ2. Αφού το σύνολο τιμών f είναι το $[-1,4]$, προφανώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 4 και η ελάχιστη το -1.

Γ3. Το -1 και το 4 ανήκουν στο σύνολο τιμών f και η f δεν παίρνει αυτές τις τιμές στα άκρα του $[1,3]$, αφού $f(1)=1\neq -1 \; και \; 4$ και $f(3)=3\neq -1 \; και \; 4$. Επομένως υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=-1$ και $f(x_2)=4$.

Γ4. Η f παρουσιάζει στα $x_1, x_2 \in (1,3)$ (και έστω $x_1 < x_2$) ελάχιστη και μέγιστη τιμή και είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά, οπότε από το Θ. Fermat έχουμε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Για την f' ισχύει το Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Επίσης η f'' είναι 1-1, επομένως το ξ αυτό είναι μοναδικό.

Γ5. Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στα $[1,x_1]$ και $[x_2,3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x_1) \subseteq (1,3)$ και $\xi_2 \in (x_2,3) \subseteq (1,3)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}=\frac{-1-1}{x_1-1}=\frac{-2}{x_1-1} \Leftrightarrow (x_1-1)f'(\xi_1)=-2 \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x_2)}{3-x_2}=\frac{3-4}{3-x_2}=\frac{-1}{3-x_2} \Leftrightarrow (3-x_2)f'(\xi_2)=-1.$$ Επομένως

$$(x_1-1)f'(\xi_1)-(3-x_2)f'(\xi_2)=-1.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Τα δυο μέλη της δοσμένης ισότητας είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επομένως έχουμε:

$$\left(f^3(x)-f^2(x)+f(x)\right)'=\left(x^3+x\right)' \Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)-2f(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{3x^2+1}{3f^2(x)-2f(x)+1}>0$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί:

$3x^2+1>0$ και $3f^2(x)-2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $\Delta=-8<0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x=0$ έχουμε $f^3(0)-f^2(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\cdot\left(f^2(0)-f(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

γιατί $f^2(0)-f(0)+1\neq 0$, αφού $\Delta=-3<0$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Για $x<0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$ και για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

Δ2. Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ και $y=0$, οπότε το σημείο $(0,0)$ είναι κοινό σημείο της C_f και της (ε). Επίσης $f'(0)=\dfrac{1}{3f^2(0)-2f(0)+1}=1=\lambda_\varepsilon$.

Άρα η (ε) εφάπτεται στη C_f στο σημείο $(0,0)$.

Δ3. Η δοσμένη ισότητα για $x=1$ δίνει:

$$f^3(1)-f^2(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1)-f(1)+1\right)=2 \Leftrightarrow f(1)=\frac{2}{f^2(1)-f(1)+1} \quad ①$$

Θέτουμε $g(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $g'(x)=2x-1$. Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'(x)	—		+
g(x)	↘		↗

ολ. ελ. $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1\geq\frac{3}{4}$, οπότε έχουμε

$$f^2(1)-f(1)+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(1)-f(1)+1}\leq\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{f^2(1)-f(1)+1}\leq\frac{8}{3}\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(1)\leq\frac{8}{3} \quad ②$$

Θέτουμε $h(x)=(x+2)f(x)-x^2-8x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=1>0$ και

$h(1)=3f(1)-8\leq 0$ λόγω της ②

Οπότε $h(0)\cdot h(1)\leq 0$.

Αν $h(0)\cdot h(1)=0 \overset{h(0)=1}{\Leftrightarrow} h(1)=0$, τότε η ζητούμενη ρίζα είναι το 1.

Αν $h(0)\cdot h(1)<0$, τότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1]$.

Δ4. Για κάθε $x\in[1,3]$ είναι $f(x)>0$, οπότε $E=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ οπότε ισχύει $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in[1,2]$ και η ισότητα ισχύει για $x=1$, επομένως

$$\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2 f(1)dx\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx>f(1)\int_1^2 1dx\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx>f(1) \quad ①$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$ οπότε ισχύει $f(x)\geq f(2)$ για κάθε $x\in[2,3]$ και η ισότητα ισχύει για $x=2$, επομένως

$$\int_2^3 f(x)dx>\int_2^3 f(2)dx\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx>f(2) \quad ②$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ① και ②:

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx > f(1) + f(2) \Leftrightarrow E > f(1) + f(2).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$ οπότε ισχύει $f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [1,3]$ και η ισότητα ισχύει για $x = 3$, επομένως

$$\int_1^3 f(x)dx < \int_1^3 f(3)dx \Leftrightarrow E < 2f(3).$$

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ