Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 113
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 74
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 25
Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οι ρίζες της $f'(x)$ είναι το -2 και το 0.
Για κάθε $x \in [-3,-2) \cup (0,2]$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-2,0)$ είναι $f'(x) < 0$.
Είναι $f'\left([-3,2]\right) = [-1,4]$.
Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,2]$.
Η f' παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -3 ίσο με $f'(-3) = \dfrac{3}{2}$, ολικό ελάχιστο στο -1 ίσο με $f'(-1) = -1$ και ολικό μέγιστο στο 2 ίσο με $f'(2) = 4$.
Β2. Από το πρόσημο της $f'(x)$ που βρήκαμε στο Β1. προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-3,-2]$ και στο $[0,2]$.

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -3 και στο 0 και τοπικό μέγιστο στο -2 και στο 2.
Απ' τη μονοτονία της f' έχουμε ότι η f είναι κοίλη στο $[-3,-1]$ και κυρτή στο $[-1,2]$.
Η C_f έχει σημείο καμπής το $\left(-1, f(-1)\right)$.
Β3. i) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -x+1$
ii) Η f είναι κυρτή στο $[-1,2]$, οπότε η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο. Επομένως $f(x) \geq -x+1$ για κάθε $x \in [-1,2]$.

iii) $x \in [-1,2]$: $x \geq -1 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x+1) \geq f'(0) \Leftrightarrow f'(x+1) \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$
$f\left(f'(x+1)\right) \geq f(0)$ (1)
Απ' το ii) για $x=0$ έχουμε $f(0) \geq 1$ (2)
Από τις (1) και (2) έχουμε $f\left(f'(x+1)\right) \geq 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \dfrac{f(x)}{1+e^x} \Leftrightarrow f'(x) + f'(x)e^x = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = -f'(x)e^x \Leftrightarrow$

$f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -f'(x) \Rightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)' = \left(-f(x)\right)'$, οπότε
$f(x)e^{-x} = -f(x) + c$.

Επειδή $f(0) = 1 \Rightarrow c = 2$, οπότε $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι και συνεχής, με

$$f'(x) = \left(\frac{2e^x}{1+e^x}\right)' = \frac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Η εξίσωση $x - ln(e^x+1) = \kappa - \ell n2$ γράφεται:

$$\ell n2 + x - ln(e^x+1) = \kappa \Leftrightarrow \ell n2 + \ell n e^x - ln(e^x+1) = \kappa \Leftrightarrow \ell n\frac{2e^x}{e^x+1} = \kappa \Leftrightarrow$$

$$\frac{2e^x}{e^x+1} = e^\kappa \Leftrightarrow f(x) = e^\kappa.$$

Επίσης $0 < \kappa < ln2 \Leftrightarrow e^0 < e^\kappa < e^{ln2} \Leftrightarrow 1 < e^\kappa < 2$.
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,2)$ γιατί:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{0}{1} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2.$$

Επομένως $e^\kappa \in (1,2) \subseteq (0,2)$.
Άρα η εξίσωση $f(x) = e^\kappa$ έχει μία τουλάχιστον λύση η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Έχουμε ήδη βρει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, οπότε η ευθεία $y=0$ (ο άξονας x΄x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο δυο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x)=\dfrac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}$.

Είναι $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Επίσης το σημείο $\left(0,f\left(0\right)\right)$ είναι σ. καμπής της C_f.

Γ4. $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1=\dfrac{e^x-1}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και

$$g\left(-x\right)=\frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}}=\frac{\left(e^{-x}-1\right)\cdot e^x}{\left(1+e^{-x}\right)\cdot e^x}=\frac{1-e^x}{e^x+1}=-g(x).$$

$\mathrm{I}=\int_{-\alpha}^{\alpha}g\left(x\right)dx=\int_{-\alpha}^{0}g\left(x\right)dx+\int_{0}^{\alpha}g\left(x\right)dx=-\int_{0}^{\alpha}g\left(x\right)dx+\int_{0}^{\alpha}g\left(x\right)dx=0$, γιατί:

Έστω $\mathrm{I}_1=\int_{-\alpha}^{0}g\left(x\right)dx$. Θέτουμε $u=-x$, οπότε $du=-dx$.

Για $x=-a$, είναι $u=a$ και για $x=0$, είναι $u=0$. Οπότε

$$\mathrm{I}_1=-\int_{\alpha}^{0}g\left(-u\right)du\overset{(g:\text{περιττή})}{=}-\int_{0}^{a}g\left(u\right)du.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. i) Έστω $h(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών (η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη). Επίσης $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από υπόθεση. Επομένως η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και είναι $h(0)=f(0)-0=1>0$. Άρα $h(x)>0\Leftrightarrow f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\frac{f(x)}{f(x)-x}=f'(x)\Leftrightarrow f(x)=f(x)\cdot f'(x)-x\cdot f'(x)\Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot f'(x)=x\cdot f'(x)+f(x)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=\left(x\cdot f(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$\dfrac{1}{2}f^2(x)=x\cdot f(x)+c$. Για $x=0$ έχουμε $c=\dfrac{1}{2}$. Οπότε

$$\frac{1}{2}f^2(x)=x\cdot f(x)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f^2(x)-2\cdot x\cdot f(x)=1\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)-2\cdot x\cdot f(x)+x^2=x^2+1\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^2+1\overset{i)}{\Leftrightarrow}$$

$f(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

iii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$, οπότε $\sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.

Δ2. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί $f(x)>0$ απ' το Δ1. iii) και $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}>0$ αφού $f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $g(0)=\ell n f(0)=\ell n 1=0$, οπότε το 0 είναι η μοναδική ρίζα της g. Επομένως

για $x<0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0) \Leftrightarrow g(x)<0$ και

για $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$.

Δ3. Η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0 και είναι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$. Οπότε

$$\mathrm{E}=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 (x)'g(x)dx=\left[xg(x)\right]_0^1-\int_0^1 xg'(x)dx=$$

$$\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 x\frac{f'(x)}{f(x)}dx \quad (1)$$

Όμως $\dfrac{f(x)}{f(x)-x}=f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{f(x)-x}$, οπότε

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{E}=\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 x\frac{1}{f(x)-x}dx=\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 x\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}-x}dx=$$

$$\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. Έστω $\varphi(x)=\ell n g(x),\ x\in[1,3]$.

Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $\varphi'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}>0$ για κάθε $x\in[1,3]$, όπως προκύπτει απ' το Δ2. Οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$.

Έστω Φ παράγουσα της φ στο $[1,3]$ (η φ είναι συνεχής οπότε έχει παράγουσα).

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_1^3 \ell n\left(g(x)\right)dx>2\cdot\int_1^2 \ell n\left(g(x)\right)dx \Leftrightarrow \int_1^3 \varphi(x)dx>2\cdot\int_1^2 \varphi(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \varphi(x)dx+\int_2^3 \varphi(x)dx>2\cdot\int_1^2 \varphi(x)dx \Leftrightarrow \int_2^3 \varphi(x)dx>\int_1^2 \varphi(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\left[\Phi(x)\right]_2^3>\left[\Phi(x)\right]_1^2 \Leftrightarrow \Phi(3)-\Phi(2)>\Phi(2)-\Phi(1).$$

Για την Φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια ώστε

$$\Phi'(\xi_1) = \frac{\Phi(2)-\Phi(1)}{2-1} \Leftrightarrow \varphi(\xi_1) = \Phi(2)-\Phi(1) \text{ και}$$

$$\Phi'(\xi_2) = \frac{\Phi(3)-\Phi(2)}{3-2} \Leftrightarrow \varphi(\xi_2) = \Phi(3)-\Phi(2).$$

Επομένως $\xi_1 < \xi_2 \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(\xi_1) < \varphi(\xi_1) \Leftrightarrow \Phi(2)-\Phi(1) < \Phi(3)-\Phi(2)$.

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ