ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 99.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 106.

Α4. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρχικά πρέπει η f να είναι συνεχής στο 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(\alpha x^2\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\beta + \frac{\ell n x}{x}\right) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad ①$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha x^2-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha(x-1)(x+1)}{x-1} = 2\alpha \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\beta+\frac{\ell n x}{x}-\alpha}{x-1} \overset{①}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ell n x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ell n x}{x^2-x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = 1.$$

Πρέπει να είναι $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Επομένως ①: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Β2. Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \le 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\ell n x}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = x$ και στο

$(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x)=\dfrac{1-\ell nx}{x^2}$. Επίσης απ' το Β1. έχουμε

$f'(1)=1$. Επομένως $f'(x)=\begin{cases} x, & x\leq 1 \\ \dfrac{1-\ell nx}{x^2}, & x>1 \end{cases}$.

Για $x>1$: $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ell nx}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\leq e$.

Τα πρόσημα της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	

Επίσης η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και στο $[e,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,e]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, ίσο με $f(0)=0$ και τοπικό μέγιστο στο e, ίσο με $f(e)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f''(x)=1$ και στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f''(x)=\dfrac{2\ell nx-3}{x^3}$.

Στο 1 η f' δεν είναι παραγωγίσιμη γιατί:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=-3$.

Επομένως $f''(x)=\begin{cases} 1, & x<1 \\ \dfrac{2\ell nx-3}{x^3}, & x>1 \end{cases}$.

Για $x>1$: $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ell nx-3}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\geq e^{\frac{3}{2}}$.

Τα πρόσημα της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ και στο $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ ενώ είναι κοίλη στο $\left[1,e^{\frac{3}{2}}\right]$.

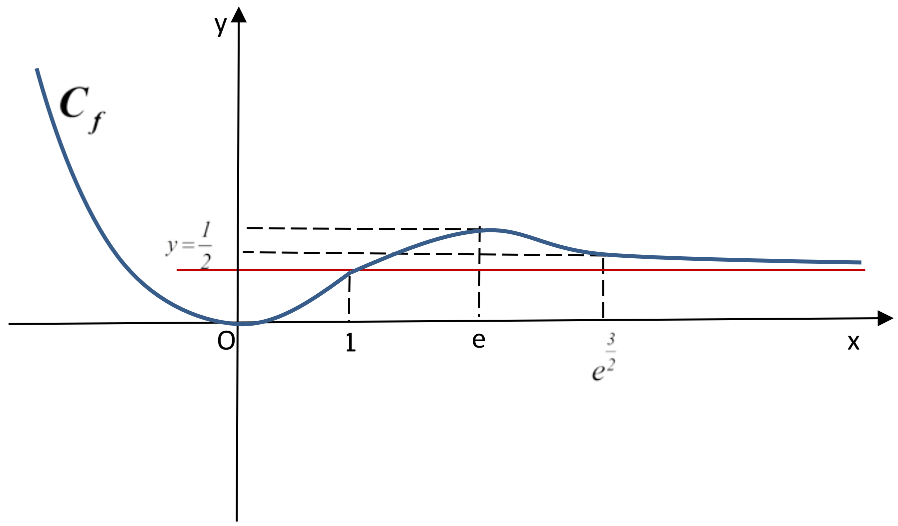
Τα σημεία $(1,f(1))$ και $\left(e^{\frac{3}{2}},f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

B3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Στο $-\infty$ η f είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\ell nx}{x}\right) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y=\dfrac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.



B4. Θέτουμε $\sqrt{x}=u$, οπότε $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \Leftrightarrow \dfrac{1}{2u}dx = du \Leftrightarrow dx = 2udu$.

Για $x=4$: $u=2$ και για $x=9$: $u=3$, οπότε

$$\mathrm{I} = \int_2^3 2uf(u)du = \int_2^3 2u\left(\frac{1}{2}+\frac{\ell nu}{u}\right)du = \int_2^3 (u+2\ell nu)du = \ldots = \frac{1}{2}+6\ell n3-4\ell n2.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και δυο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$f'(x)=(x+1)e^{x+1}-1$ και $f''(x)=(x+2)e^{x+1}$.

Τα πρόσημα της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο $[-2,+\infty)$.

Το σημείο $(-2, f(-2))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Γ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Απ’ το Γ1. έχουμε ότι η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$.

Επίσης $f'(-2)=-\dfrac{1}{e}-1<0$.

$f'\big((-\infty,-2)\big)=\left(\lim\limits_{x\to-2} f'(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=\left(-\dfrac{1}{e}-1,-1\right)$, οπότε $f'(\mathrm{x})<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2)$.

$f'\big((-2,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to-2} f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=\left(-\dfrac{1}{e}-1,+\infty\right)$.

Το 0 περιέχεται στο $f'\big((-2,+\infty)\big)$ και η f' γνησίως αύξουσα στο $(-2,+\infty)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Για $x\in(-2,+\infty)$ έχουμε: $x<x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0$ και

$$x>x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0.$$

Η f είναι συνεχής στο -2 αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0, το οποίο είναι μοναδικό.

Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$, επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες και αφού $f(-1)=f(0)=0$, το -1 και το 0 είναι μοναδικές ρίζες.

Προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[-1,0]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Απ’ το Γ2. έχουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το x_0, επομένως $x_0=\xi\in(-1,0)$, δηλαδή $-1<x_0<0$.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\big(0,f(0)\big)$ έχει εξίσωση

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=(e-1)x$.

Επίσης η f είναι κυρτή στο $[-2,+\infty)$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη.

$E=\int_0^1\big(f(x)-\mathrm{y}\big)dx=\int_0^1\big(xe^{x+1}-x-(e-1)x\big)dx=\ldots=\dfrac{e}{2}$ τ.μ.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Στο δοσμένο όριο θέτουμε $x-1=u \Leftrightarrow x=u+1$. Όταν $x\to 2$, τότε $u\to 1$, οπότε έχουμε $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{(u+1)\cdot f(u)-2\cdot f(2)}{u-1}=3$.

Θέτουμε $g(u)=\dfrac{(u+1)\cdot f(u)-2\cdot f(2)}{u-1}$ ① για u κοντά στο 1. Είναι $\lim\limits_{u\to 1}g(u)=3$.

① $\Leftrightarrow f(u)=\dfrac{(u-1)\cdot g(u)+2\cdot f(2)}{u+1}$.

α) Η f είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, οπότε

$$f(1)=\lim_{u\to 1}f(u)=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)\cdot g(u)+2\cdot f(2)}{u+1}=f(2).$$

Άρα $f(2)=f(1)=1$.

β) $$f'(1)=\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\dfrac{(u-1)\cdot g(u)+2\cdot 1}{u+1}-1}{u-1}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)\cdot g(u)-(u-1)}{(u-1)\cdot(u+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{g(u)-1}{u+1}=1.$$

Δ2. α) Προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε:

$1<\xi \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(1)<f'(\xi)\Leftrightarrow 1<0$ ΑΤΟΠΟ.

Επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η f είναι κοίλη.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x$.

Η f είναι κοίλη, οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\le x$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$.

Δ3. Για $x=1$ η ανισότητα αληθεύει ως ισότητα.

Για $x<1$:

Προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,1]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\kappa\in(x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=\dfrac{1-f(x)}{1-x}$.

$$x<\kappa \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\kappa) \Leftrightarrow f'(x)>\frac{1-f(x)}{1-x} \overset{1-x>0}{\Leftrightarrow} (1-x)\cdot f'(x)>1-f(x) \Leftrightarrow$$

$f(x)-(x-1)\cdot f'(x)-1>0$.

Δ4. $(\mathrm{x}+1)\cdot f(x-1)+2\cdot f'(x-1)=\dfrac{2x\cdot\int_0^1 f(x)dx-1}{x-1} \Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot(\mathrm{x}+1)\cdot f(x-1)+2\cdot(x-1)\cdot f'(x-1)-2x\cdot\int_0^1 f(x)dx+1=0$.

Θέτουμε $h(x)=(x-1)\cdot(\mathrm{x}+1)\cdot f(x-1)+2\cdot(x-1)\cdot f'(x-1)-2x\cdot\int_0^1 f(x)dx+1$,

$x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=-f(-1)-2f'(-1)+1<0$, απ' το Δ3. για $x=-1$ και

$h(1)=-2\int_0^1 f(x)dx+1>0$, γιατί:

απ' το Δ2. β) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$f(x)\le x$ και η ισότητα ισχύει για $x=1$, επομένως

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xdx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\int_0^1 f(x)dx+1>0.$$

Δηλαδή ισχύει $h(0)\cdot h(1)<0$.

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ