ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 151.

Α2. Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 13.

Α3. Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 88.

Α4. **1.** Σ **2.** Λ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Έστω Α το ενδεχόμενο ο γονέας να απάντησε «Ναι» στην ερώτηση Α.
Έστω Β το ενδεχόμενο ο γονέας να απάντησε «Ναι» στην ερώτηση Β.
Ισχύουν $P(A)=0,8$ (1) και $P(A'\cap B)=0,1$ (2).

Β1. Είναι $P(A'\cap B)=0,1 \Leftrightarrow P(B-A)=0,1 \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0,1$ (3).

Οπότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \overset{(1)}{\underset{(3)}{\Leftrightarrow}} P(A\cup B)=0,8+0,1 \Leftrightarrow P(A\cup B)=0,9$ (4).

Β2. Ισχύει $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow 0,1=P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B)=0,1+P(A\cap B)$ (5).

Όμως $0,2\le P(B)\le 0,4 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} 0,2\le 0,1+P(A\cap B)\le 0,4 \Leftrightarrow 0,1\le P(A\cap B)\le 0,3$.

Άρα $P(A\cap B)_{min}=0,1$ και $P(A\cap B)_{max}=0,3$.

Β3. Είναι $P(B)=0,3$ (6).

1. Από τις (5) και (6) έχουμε: $0,3=0,1+P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2$ (7).
Οπότε $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A-B)=0,8-0,2 \Leftrightarrow P(A-B)=0,6$.

2. $P((A\cap B)')=1-P(A\cap B) \overset{(7)}{=} 1-0,2=0,8$

3. $P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=1-P(A)+P(B)-P(B-A) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$

$\overset{(6)}{=} 1-0,8+0,3-0,1=0,4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c είναι το πλάτος κάθε κλάσης τότε

$$\frac{150+2c+150+3c}{2}=400 \Leftrightarrow 300+5c=800 \Leftrightarrow 5c=500 \Leftrightarrow c=100 .$$

Γ2. Είναι $f_1=\frac{1}{2}f_4 \Leftrightarrow f_4=2f_1$ (1). Ακόμη είναι: $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f_1+0,30+0,40+2f_1=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3f_1=0,3 \Leftrightarrow f_1=0,1$ (2). Η (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f_4=0,2$ (3).

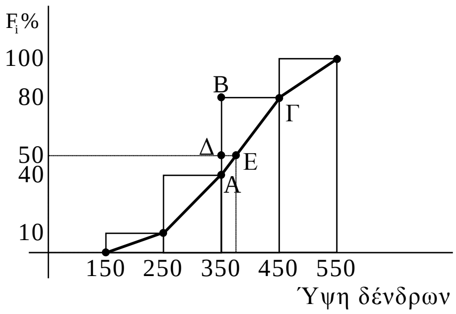
Άρα ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων θα είναι:

Ύψη (cm) [...,...)	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$
150 – 250	200	0,10
250 – 350	300	0,30
350 – 450	400	0,40
450 – 550	500	0,20
Σύνολα		1

Γ3. $\bar{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f_i = 200\cdot 0,10+300\cdot 0,30+400\cdot 0,40+500\cdot 0,20=$

$=20+90+160+100=370$ cm

Το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων % θα είναι:



Είναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A\Delta E}$, οπότε $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{40}=\frac{x}{100} \Leftrightarrow 40x=1000 \Leftrightarrow x=25$.

Άρα, $\delta=350+x \Leftrightarrow \delta=350+25 \Leftrightarrow \delta=375$ cm.

Γ4. $S^2=\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i=(200-370)^2\cdot 0,10+(300-370)^2\cdot 0,30+$

$$(400-370)^2\cdot 0,40+(500-370)^2\cdot 0,20=$$

$=170^2\cdot 0,10+70^2\cdot 0,30+30^2\cdot 0,40+130^2\cdot 0,20=$

$=2890+1470+360+3380=8100$

Επομένως, $S=\sqrt{S^2} \Leftrightarrow S=\sqrt{8100} \Leftrightarrow S=90$.

Οπότε, $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{90}{370}>\frac{1}{10}$, αφού $90\cdot 10>370$.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ5. Είναι $\bar{x}-S=370-90=280$ και $\bar{x}+S=370+90=460$. Επίσης, θεωρούμε ότι σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Έτσι:

Στο διάστημα $[250,350)$ βρίσκεται το 30% των δένδρων.

Στο διάστημα $[280,350)$ βρίσκεται το $\frac{350-280}{350-250}\cdot f_2=\frac{70}{100}\cdot 0,3=0,21$ ή 21% των δένδρων.

Στο διάστημα $[350,450)$ βρίσκεται το 40% των δένδρων.

Στο διάστημα $[450,550)$ βρίσκεται το 20% των δένδρων.

Στο διάστημα $[450,460)$ βρίσκεται το $\frac{460-450}{550-450}\cdot f_4=\frac{10}{100}\cdot 0,2=0,02$ ή 2% των δένδρων.

Άρα στο διάστημα $[\overline{x}-S,\overline{x}+S)$ βρίσκεται το $21\%+40\%+2\%=63\%$ των δένδρων.

Έστω Α το ενδεχόμενο ένα δένδρο να έχει ύψος που ανήκει στο διάστημα $[\overline{x}-S,\overline{x}+S)$.

Είναι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=f_A=\frac{63}{100}=0,63$.

Γ6. Έστω ότι το ύψος κάθε δένδρου αυξάνεται κατά α%.

Πρέπει: $\overline{x}'=\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\overline{x}\Leftrightarrow 444=\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)\cdot 370\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{100}=\frac{444}{370}\Leftrightarrow$

$1+\frac{\alpha}{100}=1,2\Leftrightarrow\frac{\alpha}{100}=0,2\Leftrightarrow\alpha=20$

Άρα το ύψος κάθε δένδρου πρέπει να αυξηθεί κατά 20%.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbb{R}$, με $f'(x)=2x-6$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=3$ το $f(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$.

2. Έστω x_1 η τετμημένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης ε και της C_f.

Πρέπει $x_1\neq 0$ και $\frac{f'(x_1)}{x_1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f'(x_1)=x_1\Leftrightarrow 2(2x_1-6)=x_1\Leftrightarrow 4x_1-12=x_1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_1=12\Leftrightarrow x_1=4$. Είναι: $f(4)=4^2-6\cdot 4+8=0$ και $f'(4)=2\cdot 4-6=2$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης ε στη C_f στο σημείο $A(4,0)$ θα είναι της μορφής $y=2x+\beta$ (1).

Όμως το σημείο $A(4,0)$ ανήκει στην ε, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την (1), δηλαδή: $0=2\cdot 4+\beta\Leftrightarrow\beta=-8$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ε στη C_f στο σημείο $A(4,0)$ είναι η $y=2x-8$.

Δ2. Επειδή στην κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχει τιμές πάνω από $\overline{x}$, ενώ το 50% των παρατηρήσεων έχει τιμές κάτω από $\overline{x}$, είναι $\delta=\overline{x}\Leftrightarrow\overline{x}=3$.

Είναι: $s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2-\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i\right)^2}{2000}}{2000}\Leftrightarrow s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i\right)^2}{2000^2}\Leftrightarrow s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i}{2000}\right)^2\Leftrightarrow$

$s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-\overline{x}^2\Leftrightarrow\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}=s^2+3^2\Leftrightarrow\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}=s^2+9\ \ (2)$

Δ3. Για να είναι το δείγμα των τετμημένων ομοιογενές αρκεί $CV\le 0,1\Leftrightarrow\dfrac{s}{\overline{x}}\le 0,1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s\le 0,1\cdot\overline{x}\overset{\overline{x}>0}{\Leftrightarrow}s^2\le 0,01\cdot\overline{x}^2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-9\le 0,01\cdot 9\Leftrightarrow\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-9\le 0,01\cdot 9\Leftrightarrow\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}\le 9,09$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2\le 9,09\cdot 2000\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2\le 18180.$

Άρα η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2$, ώστε οι τετμημένες των παραπάνω σημείων να αποτελούν ομοιογενές δείγμα είναι 18180.

Δ4. **1.** Αφού το 16% των τετμημένων έχει τιμές πάνω από 3,4, είναι $\overline{x}+s=3,4\Leftrightarrow 3+s=3,4$ $\Leftrightarrow s=0,4$.

2. $\overline{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}y_i}{2000}\Leftrightarrow\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+...+y_{2000}}{2000}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{y}=\dfrac{x_1^2-6x_1+8+x_2^2-6x_2+8+...+x_{2000}^2-6x_{2000}+8}{2000}\Leftrightarrow\overline{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2-6\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i+2000\cdot 8}{2000}$

$\Leftrightarrow\overline{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i^2}{2000}-6\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2000}x_i}{2000}+8\Leftrightarrow\overline{y}=s^2+\overline{x}^2-6\overline{x}+8\Leftrightarrow\overline{y}=0,4^2+3^2-6\cdot 3+8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{y}=0,16+9-18+8\Leftrightarrow\overline{y}=0,16-1\Leftrightarrow\overline{y}=-0,84$

3. Για κάθε σημείο της δοσμένης ευθείας η τεταγμένη είναι $y_i=2\cdot x_i-8$, $i=1,2,...,2000$.
Οι τετμημένες των σημείων του δείγματος έχουν μέση τιμή $\overline{x}=3$ και τυπική απόκλιση $s=0,4$.
Η μέση τιμή των τεταγμένων της ε θα είναι $\overline{z}=2\cdot\overline{x}-8=2\cdot 3-8=-2$.
Η τυπική απόκλιση των τεταγμένων της ε θα είναι $s_z=2\cdot s=2\cdot 0,4=0,8$.