

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΟΜΑΔΑ Α΄
ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο , σελίδα 262.

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο , σελίδα 246.

A4. α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Προκύπτει ο πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		0	
		$-$	$+$
f		\searrow	\nearrow

Τοπ. Ελάχιστο

$$f(0) = 0$$

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 , το $f(0) = 0$.

B2. $f''(x) = \frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}$

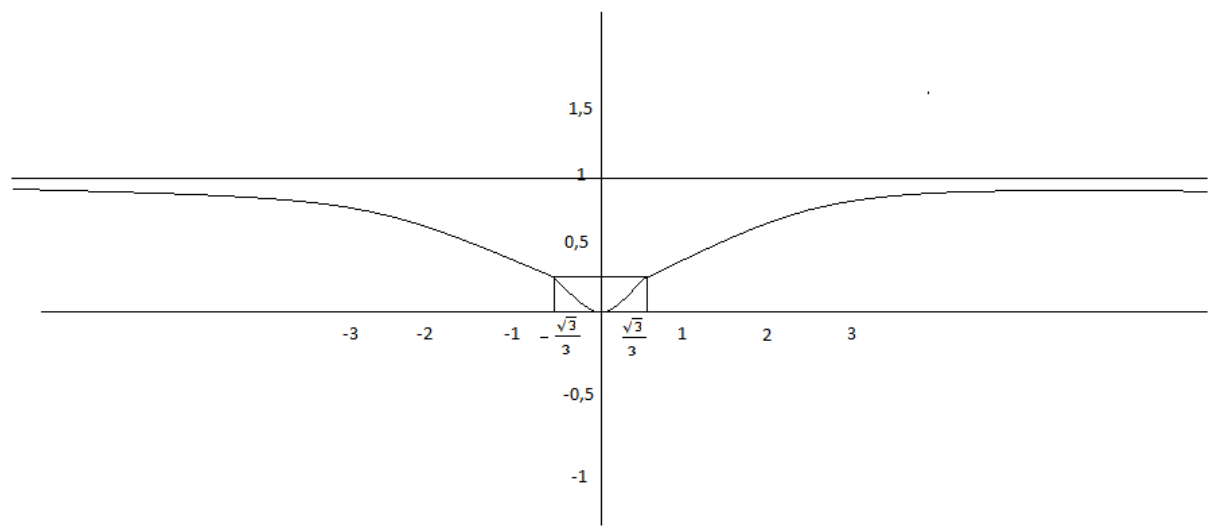
$$f'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, είναι κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$, ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



B3. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$
 $K(0) = e^0 - 1 = 0$
 $K'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1), x \in \mathbb{R}$
 $K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	-	0	+
$e^{x^2} - 1$	+	0	+
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$	\swarrow $min = 0$ \searrow		



Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Γ2.

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1) \neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Έτσι προκύπτει ότι:

α) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ ή

β) $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$ ή

γ) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases}$

δ) $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x - 2 = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$$

Είναι $f''(x) > 0$ στο \mathbb{R}^* , και επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} προκύπτει ότι f κυρτή στο \mathbb{R} .

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) = 3 \frac{f'(x+3) - f'(x)}{(x+3) - x} = 3f''(\xi), \text{ όπου } \xi \in (x, x+3).$$

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\eta\mu x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\eta\mu x| = x, x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x, x \in [0, +\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = \pi \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta\mu x dx = \pi \dots$$

$$f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

και αφού f συνεχής στο $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, δηλ. $f(0) = 0$

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi) = \pi$

$$\text{Έχουμε } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}, x \neq 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \text{ δηλ. } f'(0) = 0.$$

Δ2.

$$\alpha) \text{ Έχουμε } e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad (2)$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in R$ τότε από θεώρημα Fermat $f'(x_0) = 0$ (3).

Από (2) για $x = x_0$ έχουμε: $e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$.

Επομένως θα είναι $f'(0) = 0$ άτοπο διότι $f'(0) = 1$.

Άρα η f δε παρουσιάζει ακρότατα.

β) αφού η f δε παρουσιάζει ακρότατα στο R και είναι παραγωγίσιμη θα είναι $f'(x) \neq 0$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, x \in R$. Δηλαδή f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in R$.

Δ3. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(R) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \dots = -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{f(x)} = 0$. Άρα από κριτήριο

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.



Δ4. Θέτω $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$.

- Για $x = 1 \Rightarrow u_1 = \ln 1 = 0$
- Για $x = e^\pi \Rightarrow u_2 = \ln e^\pi = \pi$

Έτσι $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$.

Αρκεί να δείξω ότι $0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$ (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi] \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \pi$ και για $x = 0$)

$\Rightarrow f(x) \leq \pi \Rightarrow \pi - f(x) \geq 0, x \in [0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0$ (γιατί η $\pi - f(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0, \pi]$)

$\Rightarrow \int_0^\pi \pi dx - \int_0^\pi f(x) dx > 0 \Rightarrow \pi^2 > \int_0^\pi f(x) dx$ (2)

Ομοίως, $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi f(x) dx > 0$ (3)

Από (2),(3) $\Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2$ δηλαδή ισχύει η (1).

Επιμέλεια απαντήσεων :

Συγγραφική ομάδα μαθηματικών ,
φροντιστηρίου Θεματικό