Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**, ισχύει:
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

[10 μονάδες]

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

[5 μονάδες]

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $2\le f(x)\le 5$ κοντά στο 1, τότε $\lim\limits_{x\to 1}\big((x-1)f(x)\big)=0$.

β) Μια άρτια συνάρτηση δεν είναι 1-1.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\left(5^{2x}\right)'=5^{2x}\cdot \ell n5$.

δ) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(\xi)=0$ για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$.

ε) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=(f(x_0))'$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

[10 μονάδες]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$2f(x)-3f(-x)=5\left(e^{x}-e^{-x}+x\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x}-e^{-x}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

[Μονάδες 6]

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

[Μονάδες 6]

Β3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $g(x)=f(\ell nx)$ καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

[Μονάδες 7]

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-1=\eta\mu f(x)-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

[Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f(x+2)=f(x)+x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

[Μονάδες 6]

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

[Μονάδες 6]

Γ3. Για το ξ του ερωτήματος Γ1. να αποδείξετε ότι ισχύει: $\int_{\xi}^{\xi+2} xf''(x)dx=2$.

[Μονάδες 6]

Γ4. Αν είναι $\int_0^4 f(x)dx=4$, να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^2 f(x)dx$.

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=1+\dfrac{f(x)}{x}$, για κάθε $x>0$
- $f(1)=1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=f'(x)$.

[Μονάδες 5]

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=x\ln x+x,\ x>0$.

[Μονάδες 5]

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x-e$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f (Μονάδες 3) και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y=3x-e$ και την ευθεία $x=1$ (Μονάδες 4).

[Μονάδες 7]

Δ4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών $x_1,x_2,x_3\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2<x_3$, ισχύει ότι:

$$(x_3-x_2)\int_{x_1}^{x_2}(\ell n\,x+2)\,dx<(x_2-x_1)\int_{x_2}^{x_3}(\ell n\,x+2)\,dx.$$

[Μονάδες 4]

Δ5. Να αποδείξετε ότι $1\le\dfrac{\int_e^{e^2}f(\ell nx)\,dx}{e^2-e}\le 2\ell n2+2$.

[Μονάδες 4]

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ