



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία , σελίδα 194 σχολικού.

A2. Θεωρία , σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία , σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.

A4. α) \wedge , β) Σ , γ) \wedge , δ) Σ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει :

$$|(x - 4) + yi| = 2|(x - 1) + yi| \Leftrightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4[(x - 1)^2 + y^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2 .$$

Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. α) Ο w είναι πραγματικός , αν και μόνο αν , είναι $\bar{w} = w$.

Όμως

$$\bar{w} = w \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}_1}{z_2} + \frac{2\bar{z}_2}{z_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2)}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(z_1^2 + z_2^2)}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \bar{z}_1) \bar{z}_1 \cdot z_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_1 \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) z_1 \cdot \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_2|^2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\bar{z}_1 \cdot z_2 + 4z_1 \bar{z}_2 = 4z_1 \bar{z}_2 + 4z_2 \bar{z}_1 \Leftrightarrow 0 = 0 , \text{ αληθές .}$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| \leq 4$.

Πράγματι :

$$|w| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8$$

Η τελευταία ισχύει διότι :

$$|z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8$$

B3. Αν $w = -4$ είναι $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0$.

Από τη σχέση $(z_1 + z_2)^2 = 0$ προκύπτει $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$

$$|z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1| \cdot |2i - 1| = 2 \cdot |-1 + 2i| = 2\sqrt{5}.$$

$$|z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| \cdot |2i + 1| = 2\sqrt{5}$$

Προκύπτει $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow (A\Gamma) = (B\Gamma)$.

Άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f(x)		↗ *	

*γνησίως αύξουσα

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{\text{D. L. H}}{=} \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{D. L. H}}{=} \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται :

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2) \text{ . Όμως η } f \text{ ως γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 . Άρα ισοδύναμα γράφεται: } e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}.$$

Όμως η τιμή $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , η οποία είναι και γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$.

Δηλαδή η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$h(x) = \int_1^x f(t) dt, x \in (0, +\infty), \text{ με } h'(x) = f(x).$$

Η σχέση $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$, με $x > 0$, γράφεται

$$\int_{2x}^1 f(t) dt + \int_{4x}^1 f(t) dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow \int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} < f(4x). \quad (1)$$

Όμως για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[2x, 4x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε!

$$\frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = h'(\xi) \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = f(\xi).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι $f(\xi) < f(4x)$ με $2x < \xi < 4x$, που όμως ισχύει διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι, για $x > 0$ είναι $g(x) = \frac{\int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} =$

$$\frac{-\int_1^{2x} f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{h(4x) - h(2x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(4x) - h(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4h'(x) - 2h'(x)}{(x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (4f(4x) - 2f(2x)) = 4f(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Άρα η g είναι συνεχής στο 0 .

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{h(4x) - h(2x)}{x} \right)' = \left(\frac{h(4x)}{x} \right)' - \left(\frac{h(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(h(4x))'x - h(4x)x'}{x^2} - \frac{(h(2x))'x - h(2x)x'}{x^2} = \frac{4f(4x)x - h(4x) - 2f(2x)x + h(2x)}{x^2} = \\ &= \frac{[2xf(4x) - 2xf(2x)] + 2xf(4x) - [h(4x) - h(2x)]}{x^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{f(4x) - f(2x)}{x} + \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}. \end{aligned}$$

Όμως $4x > 2x$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$ και λόγω του Γ3 είναι $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$.

Άρα η $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε (λόγω και της συνέχειας στο 0) η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ συνεχής στο \mathbb{R}

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 2$$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} - (e^{-f(x)})' = (2x)'$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$$

Για $x = 0$:

$$e^0 - e^0 = c$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$$

$$e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = e^{f(x)} \cdot 2x$$

$$(e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2$$

Έστω $g(x) = e^{f(x)} - x$, συνεχής.

Αφού $g(x) \neq 0$ και g συνεχής η g διατηρεί πρόσημο. $g(0) = 1 + 0 = 1 > 0$ και $g(x) > 0$

$$|e^{f(x)} - x| = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \sqrt{1+x^2} + x \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$$

Δ2. α) $f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ άρα παρουσιάζει $x = 0$, το σημείο καμπής στο $f(0) = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα f κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Εξίσωση εφαπτομένης $y = f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x$.

β) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $y = x$

Αφού f κοίλη στο $[0, +\infty)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι πάνω από τη Cf.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \int_0^1 (y - f(x)) dx &= \int_0^1 [x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - [x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]_0^1 + \\ \int_0^1 x \cdot f'(x) dx &= \frac{1}{2} - [1 \ln(1 + \sqrt{2})] + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} - [\ln(1 + \sqrt{2})] + [\sqrt{x^2 + 1}]_0^1 = \frac{1}{2} - \\ &[\ln(1 + \sqrt{2})] + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Δ3. $\left. \begin{array}{l} \int_0^x f^2(t) dt \\ h(x) = e \\ h(0) = 1 \end{array} \right\} h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \cdot \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \cdot x \cdot \ln|f(x)|$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) = h'(0) = 0 \quad (1)$

$$h'(x) = e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)$$

$$h'(0) = 1 \cdot f^2(0) = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln|f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} DLH \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{f(x)} f'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{f(x)} \cdot f'(x) \quad (2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{f'(x)} = \frac{0}{1} = 0 \quad (3)$

Άρα από (1), (2), (3) : $0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

Δ4. $K(x) = (x - 2)[1 - 3 \int_0^{x-2} (t^2) dt] + (x - 3)[8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt]$ K συνεχής στο $[2,3]$

$$K(2) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt = 3 \cdot \left[\int_0^2 f^2(t) dt - \frac{8}{3} \right] = 3 \left[\int_0^2 f^2(t) dt - \int_0^2 t^2 dt \right] =$$

$$= 3 \left[\int_0^2 (f^2(t) dt - t^2) dt \right] < 0 \text{ γιατί } f \text{ κοίλη στο } [0,2] \text{ επομένως } f(t) \leq t \Leftrightarrow f^2(t) \leq t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(t) - t^2 < 0 \Rightarrow K(2) < 0.$$

$$K(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt = 3 \cdot \left[\frac{1}{3} - \int_0^1 f(t^2) dt \right] = 3 \left[\int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 f(t^2) dt \right] =$$

$$= 3 \left[\int_0^1 [t^2 - f(t^2)] dt \right] > 0. \text{ γιατί } f \text{ κοίλη στο } [0,1] \text{ επομένως}$$

$$\begin{array}{l} f(x) \leq x \\ \text{για } x = t^2: \quad f(t^2) \leq t^2 \\ \quad \quad \quad t^2 - f(t^2) \geq 0 \end{array} \Rightarrow \int_0^1 (t^2 - f(t^2)) dt > 0$$

$$\text{Άρα } K(2) \cdot K(3) < 0$$

Από θ · Bolzano \exists 1 τουλάχιστον $x_0 \in (2,3): \kappa(x_0) = 0$.

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Τομέας Μαθηματικών

Βαγενά Δήμητρα
 Κορέλης Γιάννης
 Μαμούση Κατερίνα
 Μάνου Βανέσα
 Νηρού Έλενα
 Πετράκης Γιώργος
 Σαμοΐλης Χρήστος