Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280.

Α3. i) Λ **ii)** Σ **iii)** Σ **iv)** Σ **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f=(0,+\infty)$, $D_g=[-4,10]$ και $g\left([-4,10]\right)=[-2,8]$.

Β2. $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\right\}=\left\{-4\le x\le 10 \,/\, g(x)>0\right\}=[-4,0)\cup(7,10]$.

$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>0 \,/ -4\le \ell nx\le 10\right\}=[e^{-4},e^{10}]$.

Β3. i) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 7} g(x)=0$.

ii) $\lim\limits_{x\to 7} f\left(g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 7^+} f\left(g(x)\right)\underset{\substack{x\to 7^+\\ y\to 0^+}}{\overset{y=g(x)}{=}}\lim\limits_{y\to 0^+} f(y)=\lim\limits_{y\to 0^+}\ell ny=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1} g\left(f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1} g\left(\ell nx\right)\underset{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}{\overset{y=\ell nx}{=}}\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$.

Β4. i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5,10]$.

ii) Η C_{-g} είναι συμμετρική της C_g ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε η $-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-4,5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5,10]$.

iii) Έστω $x_1,x_2\in[-4,0)$ με $x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(g(x_1)\right)>f\left(g(x_2)\right)$. Άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,0)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (7,10]$ με $x_1 < x_2 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(g(x_1)\right) < f\left(g(x_2)\right)$. Άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(7,10]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Γ2. $f(1) = 0$ οπότε το 1 είναι ρίζα της f και αφού η f είναι 1-1, είναι μοναδική ρίζα.

Για το πρόσημο της f έχουμε: $x < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και

$x > 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^5) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^5) = +\infty$.

Επίσης η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ3. Για $x > 1$: $f\left(f^{-1}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right) - 1\right) < -5 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right) - 1\right) < f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right) - 1 < 0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right) < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right)\right) < f(1) \Leftrightarrow$

$\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} < 1 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu f(x) < f(x)$ που ισχύει γιατί

$\eta\mu x \le |\eta\mu x| < |x| = x$ για κάθε $x > 0$.

Γ4. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = \left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)' = (x)' = 1$.

ii) Έχουμε $f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$. Επίσης απ' το i) για $x = 1$ έχουμε:

$\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right) \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0) \cdot 11 = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{11}$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$y - f^{-1}(0) = \left(f^{-1}\right)'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{11}x + 1$.

iii) Για το ζητούμενο όριο θέτουμε $\dfrac{1}{x} = y$. Όταν $x \to +\infty$, τότε $y \to 0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{y\to0}\frac{f^{-1}(y)-1}{f(y+1)} = \lim_{y\to0}\left(\frac{f^{-1}(y)-1}{y}\cdot\frac{y}{f(y+1)}\right) = \lim_{y\to0}\left(\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y-0}\cdot\frac{y}{f(y+1)}\right) =$$

$\left(f^{-1}\right)'(0) \cdot \lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{f(y+1)} = \dfrac{1}{11}\cdot\dfrac{1}{11} = \dfrac{1}{121}$, γιατί οι $f(y+1)$ και $f'(y+1)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές και $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{f(y+1)} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{f'(y+1)} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{11}$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)\cdot e^{x+f(x)} = 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^x \cdot e^{f(x)} = 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} = 3x^2\cdot e^{-x} - x^3\cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(x^3\cdot e^{-x}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^3\cdot e^{-x} + c.$$

Είναι $f(1) = -1$, οπότε για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)} = e^{-1} + c \Leftrightarrow c = 0$. Επομένως

$$e^{f(x)} = x^3\cdot e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = \ell n\left(x^3\cdot e^{-x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ell n(x^3) + \ell n(e^{-x}) \Leftrightarrow f(x) = 3\ell nx - x.$$

Δ2. Η f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών και δυο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 1$ και $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Οπότε η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται «πάνω» από την C_f. Άρα η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το σημείο επαφής.

Δ3. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -3\ell nx_0 + x_0 = \left(\frac{3}{x_0} - 1\right)(-x_0) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_0 = e.$$ Επομένως

η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - 3 + e = \left(\frac{3}{e} - 1\right)(x-e) \Leftrightarrow y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x.$$

Η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$, οπότε η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται «πάνω» από την C_f. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e (y - f(x))dx = \int_1^e \left(\left(\frac{3}{e} - 1\right)x - 3\ell\text{n}\,x + x\right)dx = \int_1^e \left(\frac{3}{e}x - 3\ell\text{n}\,x\right)dx =$$

$$\int_1^e \frac{3}{e}xdx - 3\int_1^e \ell\text{n}\,xdx = \left[\frac{3}{2e}x^2\right]_1^e - 3\int_1^e (x)'\ell\text{n}\,xdx = \frac{3e^2-3}{2e} - 3\left[x\ell nx\right]_1^e + 3\int_1^e 1dx =$$

$$\frac{3e^2-3}{2e} - 3e + 3(e-1) = \frac{3e^2-3}{2e} - 3 = \frac{3e^2-6e-3}{2e}$$ τ.μ.

Δ4. $$\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx = \int_1^2 F(x)\cdot F'(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(F^2(x)\right)' dx = \frac{1}{2}\left[F^2(x)\right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left(F^2(2) - F^2(1)\right) = \frac{1}{2}\left(F(2) - F(1)\right)\left(F(2) + F(1)\right).$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ ως αρχική της f, οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = \dfrac{F(2) - F(1)}{2-1} \Leftrightarrow f(\xi_1) = F(2) - F(1)$.

Θέτουμε $h(x) = 2F(x) - F(2) - F(1)$, $x \in [1,2]$.

Η h είναι προφανώς συνεχής στο $[1,2]$ και έχουμε

$h(1)=F(1)-F(2)$ και $h(2)=F(2)-F(1)$, οπότε $h(1)\cdot h(2)=-\left(F(1)-F(2)\right)^2<0$, γιατί $F(1)\neq F(2)$.

Επομένως από το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(\xi_2)=0 \Leftrightarrow F(\xi_2)=\dfrac{F(2)+F(1)}{2}$. Συνεπώς

$$f(\xi_1)\cdot F(\xi_2)=\left(F(2)-F(1)\right)\frac{F(2)+F(1)}{2}=\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx.$$

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ