Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 144.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 70 και 73.
Α3. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $2f(x)-3f(-x)=5\left(e^{x}-e^{-x}+x\right)$ ①

Στη θέση του x βάζουμε $-x$ και έχουμε: $2f(-x)-3f(x)=5\left(e^{-x}-e^{x}-x\right)$ ②

Λύνουμε το σύστημα των ① και ② και έχουμε $f(x)=e^{x}-e^{-x}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=e^{x}+e^{-x}+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y=x$ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$
$e^{x}-e^{-x}+x=x \Leftrightarrow e^{x}=e^{-x} \Leftrightarrow x=0$. Άρα η $C_{f^{-1}}$ και η ευθεία $y=x$ έχουν ένα κοινό σημείο το $O(0,0)$.

Β3. $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/x>0 \ \kappa\alpha\iota\ \ell nx\in D_f\right\}=(0,+\infty)$.

$$g(x)=f(\ell nx)=e^{\ell nx}-e^{-\ell nx}+\ell nx=\ell nx+x-\frac{1}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ell nx+x-\dfrac{1}{x}\right)=(-\infty)+0-(+\infty)=-\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell nx}{x}+1-\frac{1}{x^2}\right)=0+1-0=1$$, αφού

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ell nx-\frac{1}{x}\right)=(+\infty)-0=+\infty$. Επομένως η C_g δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Β4. Θέτουμε $h(x)=f(x)+x-\eta\mu f(x)-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών.

Επίσης $h(0)=-1<0$ και

$h(1)=f(1)-\eta\mu f(1)>0$ γιατί για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\eta\mu x\le|\eta\mu x|<|x|=x$ και είναι $f(1)>0$.

Οπότε από το Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,2] άρα και συνεχής σ' αυτό.

Από τη δοσμένη ισότητα για $x=0$ έχουμε: $f(2)=f(0)$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$.

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο [0,2] άρα και συνεχής σ' αυτό, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_o)=\frac{f'(2)-f'(0)}{2}$.

Και τα δύο μέλη της δοσμένης ισότητας είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$f'(x+2)=f'(x)+1\Leftrightarrow f'(x+2)-f'(x)=1$ και για $x=0$ έχουμε: $f'(2)-f'(0)=1$.

Επομένως $f''(x_o)=\frac{1}{2}$.

Γ3. $$\int_{\xi}^{\xi+2}xf''(x)dx=\int_{\xi}^{\xi+2}x\left(f'(x)\right)'dx=\left[xf'(x)\right]_{\xi}^{\xi+2}-\int_{\xi}^{\xi+2}f'(x)dx=$$

$$\left((\xi+2)f'(\xi+2)-\xi f'(\xi)\right)-\left[f(x)\right]_{\xi}^{\xi+2}\overset{(f'(\xi)=0)}{=}$$

$$(\xi+2)f'(\xi+2)-\left(f(\xi+2)-f(\xi)\right)\overset{(f(\xi+2)=f(\xi)+\xi)}{=}(\xi+2)f'(\xi+2)-\xi\overset{(f'(\xi+2)=f'(\xi)+1)}{=}$$

$$(\xi+2)\left(f'(\xi)+1\right)-\xi\overset{f'(\xi)=0}{=}\xi+2-\xi=2.$$

Γ4. Ολοκληρώνουμε τη δοσμένη σχέση κατά μέλη:

$$\int_0^2 f(x+2)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 xdx \overset{u=x+2}{\Leftrightarrow} \int_2^4 f(u)du = \int_0^2 f(x)dx + 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^0 f(u)du + \int_0^4 f(u)du = \int_0^2 f(x)dx + 2 \Leftrightarrow -\int_0^2 f(u)du + 4 = \int_0^2 f(x)dx + 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = 2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 1.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για $x>0$ και $h\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{8h}}{\dfrac{\eta\mu(8h)}{8h}} = \frac{\frac{5}{8}f'(x)+\frac{3}{8}f'(x)}{1} = f'(x)$$

διότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)+f(x)-f(x-3h)}{8h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+5h)-f(x)}{8h} - \frac{f(x-3h)-f(x)}{8h}\right)$$

Θέτουμε $u=5h$,οπότε όταν $h\to 0$, $u\to 0$ και έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{8h} = \frac{5}{8}\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = \frac{5}{8}f'(u).$$

Ομοίως θέτοντας $u=-3h$ ισχύει ότι όταν $h\to 0$, $u\to 0$,οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-3h)-f(x)}{8h} = -\frac{3}{8}\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = -\frac{3}{8}f'(x).$$

Δ2. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f'(x) = 1+\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)-f(x) = x \Leftrightarrow \frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)',$$

οπότε:

$\dfrac{f(x)}{x} = \ln x + c$. Για $x=1$ βρίσκουμε ότι $c=1$,οπότε: $\boxed{f(x) = x\ln x + x, x>0}$.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,με $f'(x) = \ln x + 2$, $x>0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x_o τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} f(x_o) = 3x_o - e \\ f'(x_o) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o\ln x_o + x_o = 3x_o - e \\ \ln x_o + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \boxed{x_o = e}$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - e$ εφάπτεται στην C_f , στο σημείο $A(e, 2e)$.

Η f είναι συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x>0$. Οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Επομένως η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται «κάτω» από την C_f και ισχύει $f(x) \geq 3x - e$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Οπότε $E = \int_1^e (f(x) - 3x + e)dx = \int_1^e (x\ln x - 2x + e)dx =$

$$\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx - \left[x^2\right]_1^e + \left[ex\right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx - \left(e^2 - 1\right) + \left(e^2 - e\right) =$$

$$\left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e + 1 - e = \frac{e^2 - 4e + 5}{4} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. $(x_3 - x_2)\int_{x_1}^{x_2} (\ln x + 2)dx < (x_2 - x_1)\int_{x_2}^{x_3} (\ln x + 2)dx \Leftrightarrow$

$$(x_3 - x_2)\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx < (x_2 - x_1)\int_{x_2}^{x_3} f'(x)dx \Leftrightarrow (x_3 - x_2)\left[f(x)\right]_{x_1}^{x_2} < (x_2 - x_1)\left[f(x)\right]_{x_2}^{x_3} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ ①. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ①.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$,άρα και συνεχής, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ, υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$,τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Δ5. $f'(x) = \ln x + 2 > 0$ για κάθε $x > 1$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

$$e \leq x \leq e^2 \overset{\ell nx:\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell ne \leq \ell nx \leq \ell ne^2 \Leftrightarrow 1 \leq \ell nx \leq 2 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) \leq f(\ell nx) \leq f(2) \Leftrightarrow$$

$1 \leq f(\ell nx) \leq 2\ell n2 + 2$. Οπότε

$$\int_e^{e^2} 1dx \leq \int_e^{e^2} f(\ell nx)dx \leq \int_e^{e^2} (2\ell n2 + 2)dx \Leftrightarrow e^2 - e \leq \int_e^{e^2} f(\ell nx)dx \leq (2\ell n2 + 2)(e^2 - e) \Leftrightarrow$$

$$1 \leq \frac{\int_e^{e^2} f(\ell nx)dx}{e^2 - e} \leq 2\ell n2 + 2.$$

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ