Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

I. 1. Δ 2. Α 3. Γ 4. Γ

II. 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Σ 5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η γ)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας στερεού σώματος ως προς άξονα ($I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + ...$) σημαντικό ρόλο έχει η απόσταση των υλικών σημείων από τον άξονα περιστροφής. Οι στοιχειώδεις μάζες που συγκροτούν τον σκελετό (2) είναι περισσότερο εντοπισμένες κοντά στον άξονα περιστροφής από ότι στους άλλους σκελετούς. Άρα λόγω κατανομής της μάζας m ως προς τον άξονα περιστροφής ισχύει για κάθε σκελετό, οπότε και για κάθε τροχό $I_2 < I_1 < I_3$ (1).

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση του συστήματος «Ποδήλατο- Αναβάτης» από την ηρεμία μέχρι την απόκτηση μεταφορικής ταχύτητας $u = u_{cm}$. Επειδή οι τροχοί κυλίονται ισχύει $u_{cm} = \omega \cdot R \Leftrightarrow \omega = \dfrac{u_{cm}}{R}$ (2). Ονομάζουμε $m_{ολ}$ την μάζα του συστήματος

$$W = \Delta K \Leftrightarrow W = K_{τελ} - K_{αρχ} \Leftrightarrow W = \frac{1}{2} m_{ολ} u_{cm}{}^2 + 2\left(\frac{1}{2} I \cdot \omega^2\right) - 0 \Leftrightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m_{ολ} u_{cm}^2 + I \cdot \frac{u_{cm}^2}{R^2} \Leftrightarrow u_{cm} = \sqrt{\frac{2W}{m_{ολ} + \dfrac{2I}{R^2}}} \qquad (3)$$

Από την τελευταία σχέση (3) βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη μεταφορική ταχύτητα προκύπτει από την μικρότερη ροπή αδράνειας I_2.

Β2. Σωστή η β)

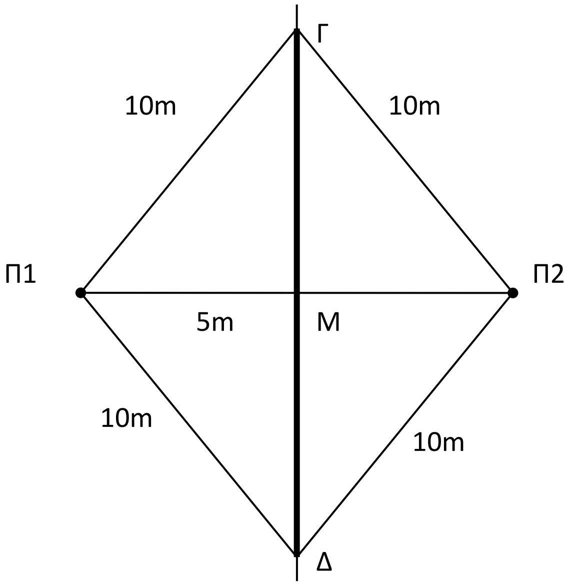
Όταν το κύμα από την πηγή Π1 φτάνει στην πηγή Π2 μια απόσταση ίση με 10m τότε κάθε κύμα από κάθε πηγή θα έχει διανύσει στο επίπεδο προς όλες τις κατευθύνσεις απόσταση

ίση με 10m.
Στο σχήμα φαίνονται τα σημεία Γ και Δ της μεσοκαθέτου του Π1Π2 που μόλις φτάνει το κύμα την δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$. Σε όλα τα σημεία του τμήματος ΓΔ έχουν φτάσει και τα δυο κύματα οπότε εκεί συμβάλλουν.
Από την γεωμετρία του σχήματος στο τρίγωνο Π1ΜΓ:

$$\Pi_1\Gamma^2 = \Pi_1\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$10^2 = 5^2 + \mathrm{M}\Gamma^2 \Leftrightarrow \mathrm{M}\Gamma = 5\sqrt{3}m$$

Όμοια $\mathrm{M}\Delta = 5\sqrt{3}m$ οπότε $\Gamma\Delta = 10\sqrt{3}m$



Β3. Σωστή η α)

Περίπτωση 1η

$$f_{A1} = \frac{u-u_1}{u+a_1\cdot t}\cdot f_s \quad (1)$$

Περίπτωση 2η

$$f_{A2} = \frac{u-a_1\cdot t}{u+u_1}\cdot f_s \quad (2)$$

Από την εκφώνηση την χρονική στιγμή $t=t_1$: $f_{A1} = f_{A2} \Leftrightarrow$

$$\frac{u-u_1}{u+a_1\cdot t}\cdot f_s = \frac{u-a_1\cdot t}{u+u_1}\cdot f_s \Leftrightarrow (u-u_1)\cdot(u+u_1) = (u-a_1\cdot t)\cdot(u+a_1\cdot t) \Leftrightarrow$$

$$u^2-u_1^2 = u^2-a_1^2\cdot t_1^2 \Leftrightarrow u_1^2 = a_1^2\cdot t_1^2 \Leftrightarrow u_1 = a_1\cdot t_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{u_1}{t_1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{u_{\eta\chi}}{20\cdot t_1}$$

Με αντικατάσταση $a_1 = \dfrac{340}{20\cdot 8,5} = 2m/s^2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2m/s^2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εξίσωση της ταλάντωσης του συστήματος «ελατήριο σταθεράς k_2 – συσσωμάτωμα» προκύπτει ότι :

$A = 0,3m$ και

$$k_2 = D = (m_3+m_1)\cdot\omega^2 \Leftrightarrow 400 = (m_3+m_1)\cdot 10^2 \Leftrightarrow 1kg + m_1 = 4kg \Leftrightarrow m_1 = 3kg \Leftrightarrow$$

$\boxed{m_1 = 3kg}$.

Η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης γιατί το συσσωμάτωμα την αποκτά στην θέση ισορροπίας ταλάντωσης.

$$V_k = u_{max} = \omega\cdot\mathrm{A} = 10\cdot 0,3 = 3m/s$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΟ για τα σώματα Σ1 και Σ3 κατά την κρούση τους με θετική φορά προς τα αριστερά.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow m_1 \cdot u_1 + 0 = (m_1 + m_3) \cdot V_k \Leftrightarrow 3 \cdot u_1 = 4 \cdot 3 \Leftrightarrow u_1 = 4m/s \Leftrightarrow \boxed{u_1 = 4m/s}$$

Γ2. Το σύστημα Σ1,Σ2 , ελατήριο σταθεράς k_1 είναι μονωμένο και κάθε χρονική στιγμή ισχύει η διατήρηση της ορμής. Η αρχική ορμή του συστήματος είναι ίση με το μηδέν οπότε οι ορμές των σωμάτων Σ1,Σ2 είναι συνεχώς αντίθετες.

Εφαρμόζουμε ΑΔΟ για το σύστημα από την αρχική στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος. Τα σώματα έχουν αποκτήσει ταχύτητες μέτρου u_1, u_2 και επιλέγουμε θετική φορά ορμής προς τα δεξιά.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow 0 = -m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 \text{ (1)}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση το 75% της U έχει αποδοθεί στο σώμα Σ2 κατά την εκδήλωση του συστήματος. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα :

$$E_{\text{ΑΡΧ}} = E_{\text{ΤΕΛ}} \Leftrightarrow U_{\text{ΑΡΧ}} + K_{\text{ΑΡΧ}} = U_{\text{ΤΕΛ}} + K_{\text{ΤΕΛ}} \Leftrightarrow$$

$$U + 0 = 0 + K_1 + K_2 \Leftrightarrow U = K_1 + K_2 (2)$$

Από την σχέση (2) και την εκφώνηση βλέπουμε ότι :

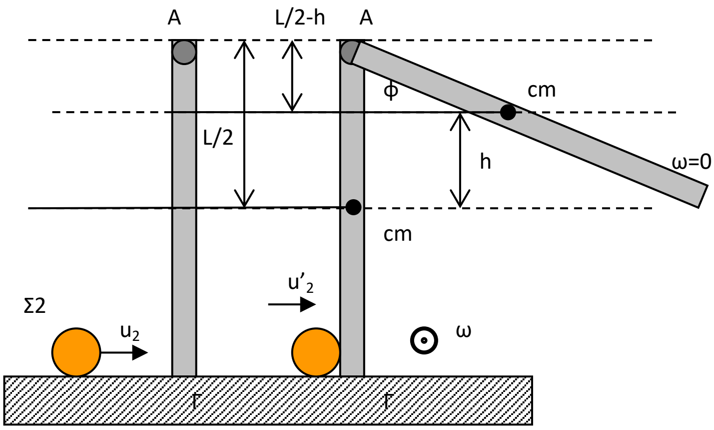
$$K_2 = 3K_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = 3\frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 \Leftrightarrow m_2 \cdot u_2^2 = 3m_1 \cdot u_1^2 \text{ (3)}$$

Με την χρήση της σχέσης (1) η (3) γράφεται διαδοχικά:

$$m_2 \cdot u_2^2 = 3m_1 \cdot u_1^2 \Leftrightarrow (m_2 \cdot u_2) \cdot u_2 = 3(m_1 \cdot u_1) \cdot u_1 \Leftrightarrow u_2 = 3 \cdot u_1 = 12m/s \text{ (4)}$$

Τελικά από τις σχέσεις (1) ,(4) προκύπτει ότι : $\boxed{m_2 = \frac{m_1}{3} = 1kg}$

Γ3.



Από εκφώνηση:

$$K_2^{'} = 2J \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^{'2} = 2J \Leftrightarrow u_2^{'} = 2m/s \text{ με φορά προς τα δεξιά.}$$

Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης στροφορμής για το σύστημα «Ράβδος- Σώμα Σ2» ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου για να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Επιλέγουμε θετική φορά στροφορμής αυτή τους σώματος Σ2 ελάχιστα πριν την κρούση.

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow m_2 \cdot u_2 \cdot L = I_A \cdot \omega + m_2 \cdot u'_2 \cdot L \Leftrightarrow$$

$$m_2 \cdot u_2 \cdot L = \left(\frac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 \right) \cdot \omega + m_2 \cdot u'_2 \cdot L \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot 12 \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot \omega + 1 \cdot 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 10 = 2\omega \Leftrightarrow \omega = 5 rad/s$$

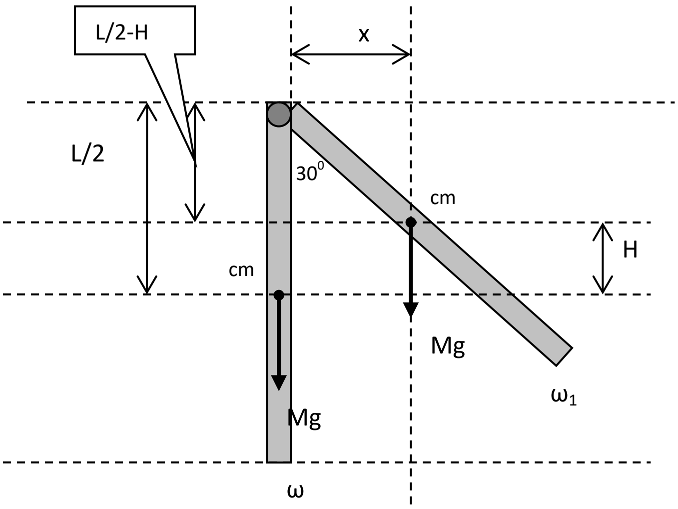
Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την ράβδο από την στιγμή που αποκτά ταχύτητα ω μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για να βρούμε την ανύψωση h του κέντρου μάζας της.

$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow -Mg \cdot h = 0 - \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \omega^2 \Leftrightarrow 60 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25 \Leftrightarrow h = \frac{5}{12} m$ Από το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος : $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\frac{L}{2} - h}{\frac{L}{2}} = \dfrac{\frac{6}{12} - \frac{5}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{6}$

Γ4. Από την ΑΔΜΕ για την κίνηση της ράβδου :

$$E = K + U \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \Leftrightarrow 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

Τελικά ο ζητούμενος ρυθμός είναι $\boxed{\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma\tau_1 \cdot \omega_1}$ (1) όπου $\Sigma\tau_1$ η ροπή που δέχεται η ράβδος στη θέση αυτή και ω_1 η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην ίδια θέση.



Ο ζητούμενος ρυθμός είναι θετικός γιατί η ράβδος περνά για πρώτη φορά από την συγκεκριμένη θέση και ανεβαίνει οπότε αυξάνει την δυναμική της ενέργεια. Στη σχέση (1) η ροπή και η γωνιακή ταχύτητα έχουν αντίθετο αλγεβρικό πρόσημο.

Για το μέτρο της ροπής στην ζητούμενη θέση:

$$\Sigma\tau_1 = \mathrm{M} \cdot g \cdot x = \mathrm{M} \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \eta\mu 30^0 \Leftrightarrow \Sigma\tau_1 = \mathrm{M} \cdot g \cdot \frac{L}{4} = 15 N \cdot m \quad (2)$$

Για να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα στην ίδια θέση εργαζόμαστε ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{L/2 - H}{L/2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{0,5 - H}{0,5} \Leftrightarrow H = 0,075m$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την ράβδο από την στιγμή που αποκτά ταχύτητα ω μέχρι να φτάσει σε θέση που σχηματίζει γωνία 30^0 με την κατακόρυφη από το σημείο Α.

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow -Mg \cdot H = \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \omega^2 \Leftrightarrow$$

$$-60 \cdot 0,075 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 \Leftrightarrow -4,5 = \omega_1^2 - 25 \Leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{20,5} rad/s \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) η (1) δίνει :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma\tau_1 \cdot \omega_1 = -(-15)\cdot\sqrt{20,5} = 15\cdot\sqrt{20,5}\,\frac{J}{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ονομάζουμε Β το κατώτερο σημείο του δίσκου που έρχεται σε επαφή με την πλάκα. <u>Το σημείο αυτό είναι ακίνητο ως προς την πλάκα λόγω της κύλισης του τροχού</u>. Αν σε απειροστό χρονικό διάστημα dt η πλάκα έχει μετατοπιστεί κατά dx_{Π} και το σημείο Β έχει μετακινηθεί κατά dx_B ισχύει $dx_B = dx_{\Pi}$ (1)

Από την αρχή της επαλληλίας για την σύνθετη κίνηση του τροχού αν dx_{cm} είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας και dS το απειροστό τόξο λόγω της περιστροφικής κίνησης , αυτά ως διανύσματα έχουν αντίθετη φορά και ισχύει κατά μέτρο :

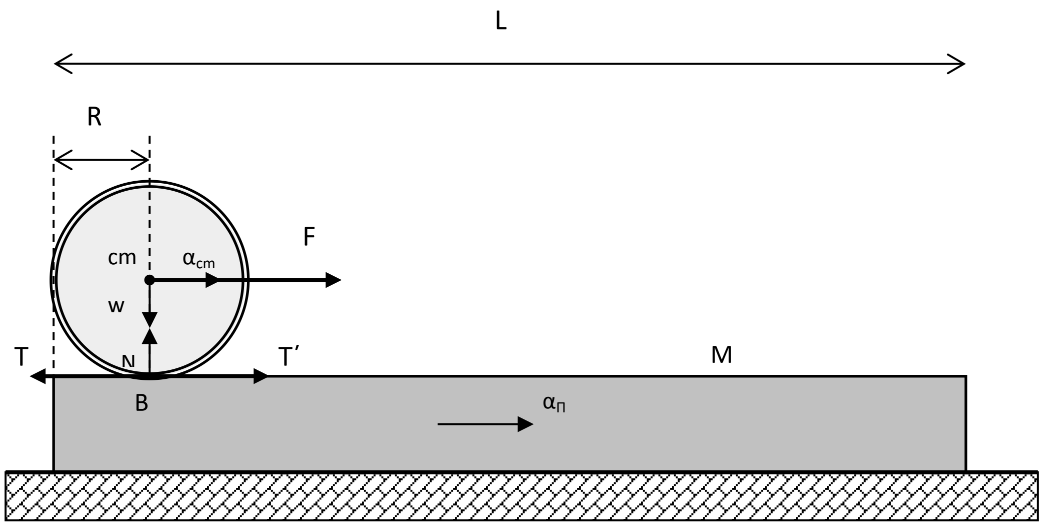
$dx_B = dx_{cm} - dS$ και λόγω τις (1) : $\boxed{dx_{\Pi} = dx_{cm} - dS}$(2)

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο την σχέση (2) και έχουμε διαδοχικά:

$$dx_{\Pi} = dx_{cm} - dS \Leftrightarrow \frac{dx_{\Pi}}{dt} = \frac{dx_{cm}}{dt} - \frac{dS}{dt} \Leftrightarrow u_{\Pi} = u_{cm} - u_{\gamma\rho(\mathrm{B})} \Leftrightarrow u_{\Pi} = u_{cm} - \omega\cdot R$$

$$u_{\Pi} = u_{cm} - \omega\cdot R \Leftrightarrow \frac{u_{\Pi}}{dt} = \frac{u_{cm}}{dt} - \frac{\omega\cdot R}{dt} \Leftrightarrow a_{\Pi} - a_{cm} - a_{\gamma}\cdot R \Leftrightarrow \boxed{a_{\Pi} = a_{cm} - a_{\gamma}\cdot R}\text{(1)}$$

Δ2.



Η συνισταμένη δύναμη των F,T επιταχύνει το κέντρο μάζας του δίσκου.

Η αντίδραση της Τ η Τ’ επιταχύνει την πλάκα

Η ροπή της Τ επιταχύνει στροφικά τον δίσκο.

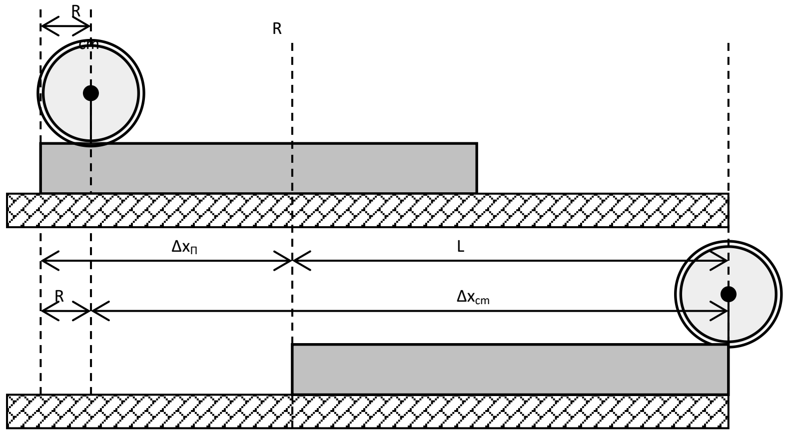
<u>Μεταφορική κίνηση cm δίσκου</u> : $F - T = m\cdot a_{cm}$ (2)

Στροφική κίνηση δίσκου :

$T \cdot R = I_{cm} \cdot a_{\gamma} \Leftrightarrow$

$T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{\gamma} \Leftrightarrow$

$T = \frac{1}{2} m \cdot (R \cdot a_{\gamma}) \qquad (3)$



Μεταφορική κίνηση πλάκας:

$T' = T = M \cdot a_{\Pi}$ (4)

Από την σχέση (1) :

$a_{\gamma} \cdot R = a_{cm} - a_{\Pi}$

και από τις (3),(4) :

$\frac{1}{2} m \cdot (a_{cm} - a_{\Pi}) = M \cdot a_{\Pi} \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{(2M+m) \cdot a_{\pi}}{m}$ (5)

Τελικά με αντικατάσταση στη σχέση (2) της (5):

$F - M \cdot a_{\Pi} = (2M+m) \cdot a_{\pi} \Leftrightarrow 28 = 28 \cdot a_{\Pi}$

Αποτελέσματα : $\boxed{a_{\pi} = 1m/s^2}$, $\boxed{a_{cm} = 5m/s^2}$ και $\boxed{a_{\gamma} = 20rad/s^2}$.

Δ3. Έστω ότι την χρονική στιγμή t=t_1 το κέντρο μάζας του δίσκου έχει μετατοπιστεί κατά Δx_{cm} και το κέντρο μάζας της πλάκας (η απλά η πλάκα) κατά Δx_{Π}

Μέχρι ο δίσκος να φτάσει στο άκρο της πλάκας το κέντρο μάζας του δίσκου θα έχει διανύσει απόσταση μεγαλύτερη από την πλάκα και μάλιστα η απόσταση αυτή από το σχήμα είναι ίση με $d = L - R = 4,7 - 0,2 = 4,5m$

Ισχύει η εξίσωση (από το σχήμα) : $\Delta x_{cm} + R = \Delta x_{\Pi} + L \Leftrightarrow$

$\Delta x_{cm} - \Delta x_{\Pi} = L - R \Leftrightarrow \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t_1^2 - \frac{1}{2} a_{\Pi} \cdot t_1^2 = 4,5 \Leftrightarrow 2 \cdot t_1^2 = 4.5 \Leftrightarrow t_1 = 1,5s$

Δ4. α) $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma} \cdot t_1^2}{2\pi} = \frac{45}{4\pi}$ περιστροφές.

β) $W_F = F \cdot \Delta x_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = F \cdot \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t_1^2 = 157,5J \Leftrightarrow \boxed{W_F = 157,5J}$

Δ5. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί:

Άξονας x: Μεταφορική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $u_{cm} = u_0 = a_{cm} \cdot t_1 = 5 \cdot 1,5 = 7,5m/s$ και επιτάχυνση που προκύπτει από τον τύπο :

$\Sigma F_x = m \cdot a_x \Leftrightarrow 28 = 4 \cdot a_x \Leftrightarrow a_x = 7m/s$.

Άξονας y: Ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η επιτάχυνση κίνησης είναι ίση με g και η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή $u_y = g \cdot t$.

Η στροφική κίνηση του δίσκου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι ομαλή (ούτε το βάρος ούτε η F ασκούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής) και η σταθερή στροφική κινητική ενέργεια δίνεται από τον τύπο $K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot (\alpha_{\gamma} \cdot t_1)^2 = 36J$.

Για την νέα αρχή μέτρησης των χρόνων έχει παρέλθει χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,5s$ και οι συνιστώσες ταχύτητες δίνονται από τον τύπο :

$$u_x = u_0 + a_x \cdot \Delta t = 7,5 + 7 \cdot 0.5 = 11m/s$$

$$u_y = g \cdot \Delta t = 10 \cdot 0,5 = 5m/s$$

Η ολική μεταφορική ταχύτητα ικανοποιεί τη σχέση: $u_{cm}{}^2 = u_x^2 + u_y^2 = 146\frac{m^2}{s^2}$

Η ολική κινητική ενέργεια είναι :

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}m \cdot u_{cm}{}^2 + K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}m \cdot (u_x^2 + u_y^2) + K_{\sigma\tau\rho} \Leftrightarrow \boxed{K = 328J}.$$

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΑΡΗΣ – ΚΑΤΣΑΡΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ
ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ