ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f\,'(x_0) = 0$.

Α2. Να δοθεί ο ορισμός του τοπικού μέγιστου και τοπικού ελάχιστου μια συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Αν η f' συνεχής στο $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

ii. Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

iii. Έστω f, g συνεχείς στο Δ με $\alpha, \beta \in \Delta$. Αν $f(x) \leq g(x)$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$.

iv. Έστω $z \in C$ τότε :$|i\bar{z}| = |z| = |\bar{z}|$

v. Αν $\lim_{x\to x_0}[\,f(x) + g(x)] = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l\ (l \in R)$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $f : [\,a\,, +\infty) \to R$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 \cdot e}\int_0^x g(t)dt\,, x > \alpha \\ \beta, \quad x = a \end{cases}$

- g τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$
- $g(0) = 0\,, g'(0) = 0$ και
- $\alpha = \lim_{x\to+\infty}[\ln(e^x + 1) - x]$.

Β1: Να βρεθεί το β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = \alpha$

Β2: Αν υποθέσουμε ότι :

$$\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)^2 < -\int_0^1 g(t)\,dt \cdot \int_1^2 g(t)dt\,,$$

να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \epsilon\ (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Β3: Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Β4: Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \epsilon\ (0, +\infty) : f'(x_1) = 0$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται $f: R \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ και συνεχή δεύτερη παράγωγο.Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(2, -1)$.

Γ1 : Να δείξετε ότι η f' έχει μοναδική λύση στο R.

Γ2 : Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3 : Έστω ο μιγαδικός u.

Αν ισχύει $f'\left(2 + f'(|iu + 1|)\right) < 0$ να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων του u.

Γ4 : Έστω οι μιγαδικοί z, z_1, z_2, w για τους οποίους ισχύει: $|z - z_1| = f(1)$, $|w - z_2| = f(2)$ και $|z_1 - z_2| = 2f\left(\frac{3}{2}\right)$. Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των z, w και η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: R \rightarrow R$, με την f γνησίως φθίνουσα και την g γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ και $G(x) = \int_0^x g(t)dt, \forall x \epsilon R$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $\int_0^\alpha f(t)dt = \int_0^\alpha g(t)dt$.

Να αποδειχθεί ότι:

Δ1: Η συνάρτηση F είναι κοίλη και η G είναι κυρτή.

Δ2: Υπάρχει $\xi \epsilon (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Δ3: Η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{x} \cdot F(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$.

Δ4: $\frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t)dt > \frac{1}{y} \cdot \int_0^y g(t)dt$ για κάθε $x, y \in (0, a)$.

Δ5: $\int_0^{2013} g(t)dt + \int_0^{2014} g(t)dt < \int_0^{2015} g(t)dt + \int_0^{2012} g(t)dt$

Επιμέλεια Θεμάτων:
Τομέας Μαθηματικών

Βαγενά Δήμητρα

Κορέλης Γιάννης

Μαμούση Κατερίνα

Σαμοΐλης Χρήστος