ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα Fermat Σχολικό βιβλίο, σελ 260

Α2. Από Σχολικό βιβλίο, σελ. 258-259

Α3. Σ – Λ – Λ – Σ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1: Έχουμε, $\alpha = \lim_{\chi\to+\infty}[\ln(e^x+1)-\ln e^x] = \lim_{x\to+\infty}(\ln\frac{e^x+1}{e^x}) = 0$

$\Longrightarrow f(0)=\beta$ **(1).** $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x^2\cdot e} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{(\int_0^x g(t)dt)'}{(x^2\cdot e)'} =$

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{2x\cdot e} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{(2x\cdot e)'} = \lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2e} = \frac{g'(0)}{2e} = 0$ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** $\Longrightarrow f(0)=0 \Longrightarrow \beta=0.$

- *Η g συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η $P(x)=\int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμη και η $\Phi(x)=x^2e$ παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.*
- *Η g' είναι παραγωγίσιμη [0,+∞) άρα η g' είναι συνεχής στο [0,+∞) .*

Β2: Είναι: $f(x)=\frac{1}{x^2\cdot e}\cdot\int_0^x g(t)dt$ συνεχής στο $[1,2]$

$f(1)\cdot f(2) = \left(\frac{1}{e}\cdot\int_0^1 g(t)dt\right)\cdot(\frac{1}{4e}\cdot\int_0^2 g(t)dt) =$

$$\frac{1}{4e^2}\cdot\int_0^1 g(t)dt\cdot[\int_0^1 g(t)dt+\int_1^2 g(t)dt] =$$

$$\frac{1}{4e^2}\cdot[\left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2+\int_0^1 g(t)dt\cdot\int_1^2 g(t)dt] < 0.$$

Οπότε από το θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\epsilon(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Β3: Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2e}\int_0^x g(t)dt}{x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x^3} = \frac{1}{e}\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{3x^2} =$$

$$\frac{1}{e}\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{6x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{6} = \frac{1}{e}\cdot\frac{g''(0)}{6}\ \epsilon\ R.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

- Επειδή η g είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, η g'' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Άρα $\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{6} = \frac{g''(0)}{6} \in R.$

Β4: Ισχύει ότι : f είναι συνεχής στο $[0,x_0] \subseteq [0,+\infty)$

f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)\subseteq[0,+\infty)$

$f(0)=f(x_0)=0$

τότε από Θ. Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\epsilon(0,x_0)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1: Προφανή λύση x= *1,διότι* $f'(1)=0$. *Θα δείξουμε οτι είναι μοναδική*

Έστω ότι έχει και δεύτερη λύση x_0 .Με εφαρμογή του Θ.Rolle υπάρχει

$\xi\in(1,x_0) : f''(\xi)=0$ ΑΤΟΠΟ.

Γ2: f″ συνεχής και $\neq 0$ οπότε διατηρεί πρόσημο στο R

Αν $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$:γνησίως αύξουσα … ΑΤΟΠΟ.

$\text{οπότε } f''(x) < 0 \text{ άρα } f'$: γνησίως φθίνουσα και $f'(1) = 0$

$x > 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Ο.Μ

Γ3: $f'\left(2 + f'(|iu + 1|)\right) < 0 \Leftrightarrow$

$f'(2 + f'(|iu + 1|)) < f'(1) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} 2 + f'(|iu + 1|) > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(|iu + 1|) > f'(2) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} |iu + 1| < 2 \Leftrightarrow |iu - i^2| < 2$

$\Leftrightarrow |i||u - i| < 2 \Leftrightarrow |u - i| < 2$

Αρα (γ.τ) εσωτερικά σημεία κύκλου με κέντρο Κ$(0,1)$ $\text{και } \rho = 2$

Γ4: Από $|z - z_1| = f(1)$, έχουμε ότι ο γ.τ. των z είναικύκλος με κέντρο $K_1(z_1)$ και $R_1 = f(1)$.

Από $|w - z_2| = f(2)$, έχουμε ότι ο γ.τ. των w είναι κύκλος με κέντρο $K_2(z_2)$ και $R_2 = f2)$.

Έχουμε $\xi_1 < \xi_2$ και f' γνησίως φθίνουσα άρα

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{1}{2}} > \frac{f(2) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{3}{2}\right) > f(2) + f(1) \Leftrightarrow$$

$|z_1 - z_2| > |z - z_1| + |w - z_2|$ **(1)**

Το $|z_1 - z_2|$ είναι η απόσταση των κέντρων των κύκλων C_1, C_2, οπότε από την **(1)** συνεπάγεται ο ένας εξωτερικός του άλλου. Άρα:

$|z - w|_{max} = R_1 + (k_1 k_2) + R_2 = f(1) + f(2) + 2f(\frac{3}{2})$

$|z - w|_{min} = (k_1 k_2) - (R_1 + R_2) =$

$= 2f\left(\frac{3}{2}\right) - \left(f(1) + f(2)\right)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1:f συνεχής οπότε $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη

$F'(x) = f(x)$ φθίνουσα, άρα η F κοίλη.

g συνεχής οπότε $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμη

$G'(x) = g(x)$ αύξουσα, άρα η G κυρτή.

Δ2: Θ. Rolle γα την $H(x) = F(x) - G(x)$

H παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0, \alpha]$

με $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$

$H(0) = H(a) = 0$

Οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$: $H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$

Δ3: $\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{F}'(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{x} - \mathrm{F}(\mathrm{x}) \cdot (\mathrm{x})'}{\mathrm{x}^2} = \frac{f(x) \cdot x - F(x)}{\mathrm{x}^2}$

Βρίσκω πρόσημο: $f(x) \cdot x - F(x) = x \cdot (f(x) - \frac{F(x)}{x})$

Για $x > 0$: $\Theta.M.T.$ για την F στο $[0, x]$

$\xi \in (0,x)$: $F'(\xi) = f(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$

Άρα : $f(x)\cdot x - F(x) = x\big(f(x) - f(\xi)\big)$

f γνησίως φθίνουσα για $x > \xi$ έχω :

$f(x) < f(\xi) \Leftrightarrow f(x) - f(\xi) < 0$

Άρα $h'(x) < 0$ οπότε h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Όμοια για $x < 0$, $h'(x) < 0$ οπότε h γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Δ4 : Η συνάρτηση $h(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\alpha)$.

Άρα για $0 < x < \alpha$, ισχύει: $h(x) > h(\alpha) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} > \frac{F(\alpha)}{\alpha}$ **(2)**

Για τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{G(x)}{x}$ έχουμε :

$\varphi'(x) = \frac{g(x)\cdot x - G(x)}{x^2}$ **(3)**

Έχω : για $x > 0$, $g(x)\cdot x - G(x) = x \cdot \left(g(x) - \frac{G(x)}{x} \right)$ $Θ.Μ.Τ$ ... $οπότε$ $x\big(g(x) - g(\xi)\big) > 0$

Για $x > \xi$, g γνησίως αύξουσα , $g(x) > g(\xi)$

Άρα από την **(3)** $\varphi'(x) > 0$ όποτε φ γνησίως αύξουσα Όποτε για 0< $y < \alpha$ ισχύει $\varphi(y) < \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \frac{G(y)}{y} < \frac{G(\alpha)}{\alpha}$ όμως $G(\alpha) = F(\alpha)$ άρα και $\frac{G(y)}{y} < \frac{F(\alpha)}{\alpha}$ **(4)**

Από **(2),(4)** προκύπτει $\frac{F(x)}{x} > \frac{G(y)}{y}$.

Δ5 : Έχουμε G συνεχής στο $[2012,2013]$ και παραγωγίσιμη στο $(2012,2013)$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1 \in (2012,2013)$:

$$G'(x_1) = \frac{G(2013) - G(2012)}{2013 - 2012} \Rightarrow$$

$G'(x_1) = \int_0^{2013} g(t)dt - \int_0^{2012} g(t)dt$ **(1) .**

Ομοίως με Θ.Μ.Τ στο [2014,2015] $υπάρχει$ $x_2 \in (2014,2015)$:

$$G'(x_2) = \frac{G(2015) - G(2014)}{2015 - 2014} \Rightarrow$$

$\Rightarrow G'(x_2) = \int_0^{2015} g(t)dt - \int_0^{2014} g(t)dt$ **(2) .**

Ισχύει G κυρτή , άρα G' γνησίως αύξουσα **(3)**

Από (1),(2),(3) έχουμε για $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$G'(x_1) < G'(x_2) \Rightarrow \int_0^{2013} g(t)dt - \int_0^{2012} g(t)dt < \int_0^{2015} g(t)dt - \int_0^{2014} g(t)dt$ $οπότε$:

$\int_0^{2013} g(t)dt + \int_0^{2014} g(t)dt < \int_0^{2015} g(t)dt + \int_0^{2012} g(t)dt$

Επιμέλεια Απαντήσεων:
Τομέας Μαθηματικών
Βαγενά Δήμητρα
Κορέλης Γιάννης
Μαμούση Κατερίνα
Σαμοΐλης Χρήστος